   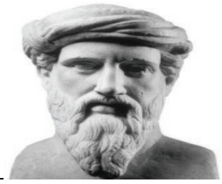

I Analytische Geometrie mit linearer Algebra

Inhaltsverzeichnis

I.5 Gegenseitige Lage von Gerade-Ebene

I.5.1 Definition

In I.3 habt ihr gelernt, wie man 2 Geraden auf ihre Lage zueinander untersucht, in I.4 habt ihr gelernt wie man 2 Ebenen auf ihre gegenseitige Lage untersucht. In diesem Kapitel lernt ihr nun, wie ihr eine Gerade auf ihre Lage zu einer Ebene untersucht.

Wie immer haben wir mehrere Möglichkeiten. Die Gerade kann parallel zur Ebene verlaufen (vgl. Abbildung 33) , in der Ebene verlaufen (vgl. Abbildung 34) oder sie kann die Ebene schneiden (Man sagt dann auch durchstoßen) (vgl. Abbildung 35) . Auch hier gilt wieder: Weg mit dem LGS.

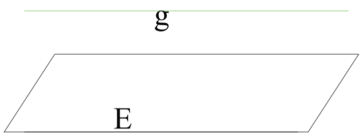

Abbildung 34: g parallel zu E

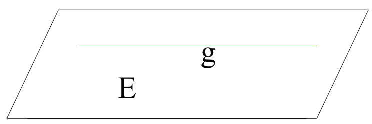

Abbildung 35: g in E

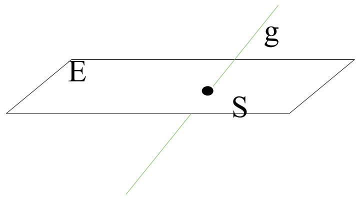

Abbildung 33: g schneidet E in S

1. Verfahren: Ebene ist in Koordinatenform gegeben (unser Liebling):

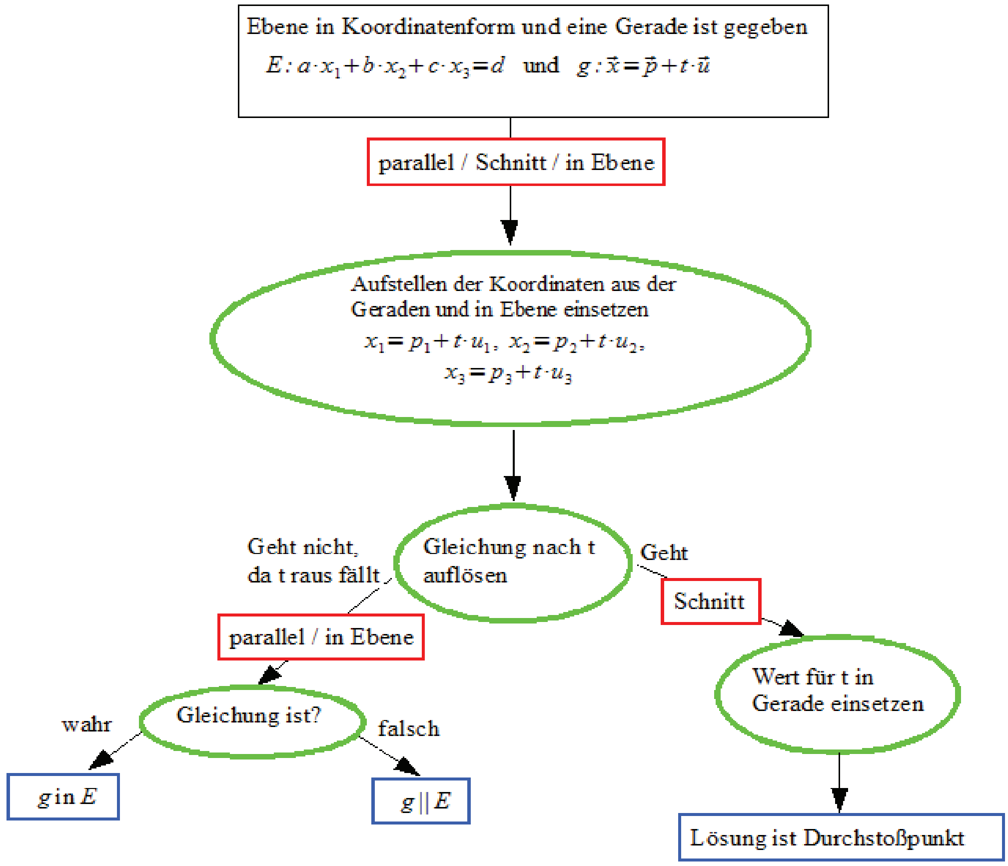

Abbildung 36: Schema zur Lagebestimmung zwischen Gerade und Ebene (Koordinatenform)

2. Verfahren: Ebene ist in Parameterform gegeben:

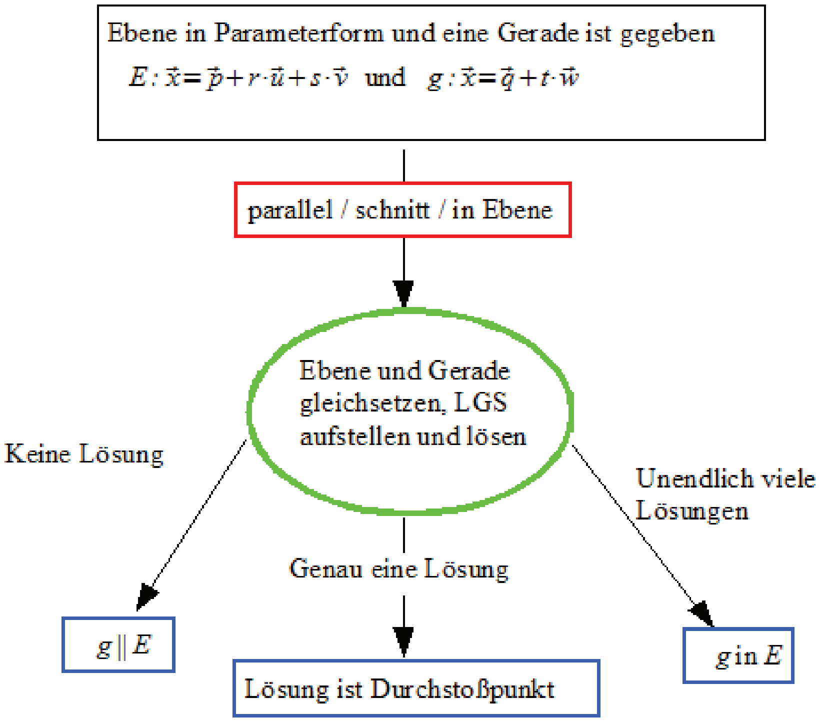

Abbildung 37: Schema zur Lagebestimmung zwischen Gerade und Ebene (Parameterform)

Wenn ihr das Spiel gute Ebene, böse Ebene beherrscht, ist es natürlich besser die Ebene zuerst in die Koordinatenform umzuwandeln und dann Verfahren 1 anzuwenden. Aber so geht es auch, dauert halt manchmal ein wenig länger.

Beispiel 1:

Untersuche die Lage der Geraden g bezüglich der Ebene E $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = -1$. Wie man leicht sieht, lohnt es sich hier das Verfahren 1 anzuwenden. Also sind unsere Koordinaten: $\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3 \cdot t \\ x_2 &= 2 + 1 \cdot t \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$

Somit lautet unsere Gleichung:

$$2 \cdot (1 + 3 \cdot t) + 3 \cdot (2 + 1 \cdot t) = -1 \Leftrightarrow 2 + 6 \cdot t + 6 + 3 \cdot t = -1 \Leftrightarrow 9 \cdot t = -9 \Leftrightarrow t = -1$$

In g eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ also ist unser Durchstoßpunkt $(-2|1|1)$

Beispiel 2:

Gleiche Aufgabenstellung mit: $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ und $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$

Wir nehmen jetzt mal Verfahren 2.

Also bilden wir das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 0\\0 & 1 & -1 & -1\\1 & 2 & -3 & 0\end{array}\right)$ daraus ergibt sich, dass sich die Zeile 3 eliminiert.

Also bleibt übrig $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 0\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. Da wir nun eine Gleichung weniger haben, aber immer noch 3 Variablen, sehen wir sofort, dass wir unendlich viele Lösungen erhalten. Dies wiederum verrät uns, dass die Gerade in der Ebene liegen muss. (Genau genommen haben Eben und Gerade unendlich viele Punkte gemeinsam, weshalb die Gerade in der Ebene liegt)

Beispiel 3:

Überprüfe die Lage der Geraden g und der Ebene E.

$E:-2\cdot x_1+6\cdot x_2+1\cdot x_3=12$ und $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$

Nach Verfahren 1 lauten die Koordinaten der Geraden: $\begin{array}{l}x_1=3+4\cdot t\\x_2=3+1\cdot t\\x_3=3+2\cdot t\end{array}$ und nach dem einsetzen in die Ebene:

$(-2)\cdot(3+4\cdot t)+6\cdot(3+1\cdot t)+1\cdot(3+2\cdot t)=12$

Nach kurzem heftigem Rechnen ergibt sich: $-6-8\cdot t+18+6\cdot t+3+2\cdot t=12 \Leftrightarrow 15=12$ Was natürlich eine Falsche Aussage ist, und somit die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Hinweis:

Eine Gerade g ist orthogonal zu einer Ebene E, falls der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E linear abhängig sind (vgl. Abbildung 39).

Sie sind parallel, wenn das Skalarprodukt von Richtungsvektor und Normalenvektor Null ergibt. $g\perp E\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ (vgl.).

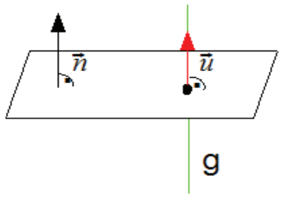

Abbildung 39: g senkrecht zu E

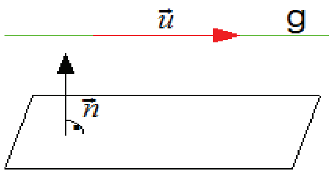

Abbildung 38: g parallel zu E

I.5.2 Aufgaben zu Geraden und Ebenen

Aufgabe 1:

Bestimme die Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu der Ebene $E: 3 \cdot x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = 5$

Aufgabe 2:

Welche Lage hat die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Wandle die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in Koordinatenform um und überprüfe ihre Lage zu $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

I.5.3 Lösungen

Aufgabe 1:

$g \parallel E$, also g ist parallel zu E

Aufgabe 2:

g liegt in E

Aufgabe 3:

g durchstößt E im Punkt $P\left(\frac{8}{6} \middle| -\frac{1}{6} \middle| \frac{7}{6}\right)$