

I Analytische Geometrie mit linearer Algebra

Inhaltsverzeichnis

I Analytische Geometrie mit linearer Algebra.....	1
I.1 Lineare Algebra.....	7
I.1.1 Definition eines LGS:	7
I.1.2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme.....	9
<i>Keine Lösung:</i>	10
<i>Genau eine Lösung:</i>	10
<i>Unendlich viele Lösungen:</i>	11
I.1.3 Besondere LGS.....	14
<i>Homogene LGS:</i>	14
<i>Symmetrische LGS:</i>	14
<i>Nicht symmetrische LGS:</i>	14
I.1.4 LGS mit Parametern.....	17
<i>Beispiel 1: Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems:</i>	17
<i>Beispiel 2: Bestimme in Abhängigkeit des Parameters die Anzahl der Lösungen.....</i>	18
<i>Beispiel 3: um Gottes willen</i>	20
<i>Beispiel 4: Das Gleiche nochmal, nur ein wenig komplizierter</i>	21
<i>Beispiel 5: Für alle, die nicht genug bekommen oder heute noch nichts anderes zu tun haben.</i>	23
I.1.5 Die Matrixschreibweise.....	25
I.1.6 Übungsaufgaben.....	26
<i>Aufgabe 1: Bestimme die Lösungsmenge des LGS.....</i>	26
<i>Aufgabe 2: Bestimme die Lösungsmenge des LGS.....</i>	26
<i>Aufgabe 3: Bestimme die Lösungsmenge des LGS.....</i>	26
<i>Aufgabe 4: Bestimme die Lösungsmenge des LGS</i>	27
<i>Aufgabe 5: Bestimme in Abhängigkeit des Parameters die Anzahl der Lösungen.....</i>	27
I.1.7 Lösungen.....	28
<i>Aufgabe 1:</i>	28
<i>Aufgabe 2:</i>	28
<i>Aufgabe 3:</i>	28
<i>Aufgabe 4:</i>	29
<i>Aufgabe 5:</i>	30
I.2 Vektoren.....	31

I.2.1 Geometrische Interpretation.....	32
I.2.2 Rechnen mit Vektoren.....	34
<i>Beispiele für Umformungen von Vektortermen:</i>	36
I.2.3 Länge bzw. Betrag eines Vektors.....	38
I.2.4 Übungsaufgaben zu Vektoren.....	39
<i>Aufgabe 1: Vereinfache die Vektoren so weit wie möglich:</i>	39
<i>Aufgabe 2: Bestimme von den drei Punkten $A(1 3 9)$, $B(-3 6 2)$, $C(-1 -12 -8)$.</i>	39
<i>Aufgabe 3:</i>	39
<i>Aufgabe 4: Zeige,</i>	39
I.2.5 Lösungen	40
<i>Aufgabe 1:</i>	40
<i>Aufgabe 2:</i>	40
<i>Aufgabe 3:</i>	40
<i>Aufgabe 4:</i>	41
I.2.6 Normierung eines Vektors.....	43
I.2.7 Das Skalarprodukt.....	44
<i>Der Cosinussatz:</i>	44
I.2.8 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit.....	48
<i>Geometrische Bedeutung:</i>	48
<i>Rechnerische Vorgehensweise:</i>	48
I.2.9 Übungsaufgaben zu Linearer Unab-/Abhängigkeit.....	53
<i>Aufgabe 1: Untersuche auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit.</i>	53
<i>Aufgabe 2: Bestimme die Zahl s, dass die Vektoren linear abhängig sind.</i>	53
<i>Aufgabe 3: Bestimme die Zahl s, dass die Vektoren linear abhängig sind.</i>	53
I.2.10 Lösungen.....	54
<i>Aufgabe 1:</i>	54
<i>Aufgabe 2:</i>	54
<i>Aufgabe 3:</i>	55
I.2.11 Das Teilverhältnis.....	56
I.2.12 Beweise mit Vektoren.....	57
<i>Noch ein paar Beispiele (geschlossener Streckenzug und Skalarprodukt):</i>	58
I.2.13 Übungsaufgaben zu Beweise mit Vektoren.....	61
<i>Aufgabe 1:</i>	61
<i>Aufgabe 2:</i>	61
<i>Aufgabe 3:</i>	61
<i>Aufgabe 4:</i>	61
I.2.14 Lösungen.....	62
<i>Aufgabe 1:</i>	62
<i>Aufgabe 2:</i>	63
<i>Aufgabe 3:</i>	63
<i>Aufgabe 4:</i>	64
I.3 Geraden.....	65
I.3.1 Definition von Geraden.....	65
I.3.2 Übungsaufgaben zu Geradenkonstruktion.....	68
<i>Aufgabe 1:</i>	68
<i>Aufgabe 2:</i>	68
<i>Aufgabe 3:</i>	68
I.3.3 Lösungen.....	68
<i>Aufgabe 1:</i>	68
<i>Aufgabe 2:</i>	68
<i>Aufgabe 3:</i>	68
I.3.4 Die Punktprobe.....	69

I.3.5 Übungsaufgaben zu Punktprobe.....	71
<i>Aufgabe 1:</i>	71
<i>Aufgabe 2:</i>	71
<i>Aufgabe 3:</i>	71
I.3.6 Lösungen.....	71
<i>Aufgabe 1:</i>	71
<i>Aufgabe 2:</i>	71
<i>Aufgabe 3:</i>	71
I.3.7 Schnitt von Geraden.....	72
I.3.8 Übungsaufgaben zu Geraden.....	77
<i>Aufgabe 1:</i>	77
<i>Aufgabe 2:</i>	77
<i>Bestimme eine Geradenschar die durchgeht.....</i>	77
<i>Aufgabe 3: Konstruiere eine Gerade g, die</i>	77
<i>Aufgabe 4: Überprüfe ob folgende Punkte auf den Geraden liegen.....</i>	77
<i>Aufgabe 5: Untersuche die gegenseitigen Lagen der Geraden.....</i>	77
<i>Aufgabe 7:</i>	78
I.3.9 Lösungen	79
<i>Aufgabe 1:</i>	79
<i>Aufgabe 2:</i>	79
<i>Aufgabe 3:</i>	79
<i>Aufgabe 4:</i>	79
<i>Aufgabe 5:</i>	79
<i>Aufgabe 6:</i>	79
<i>Aufgabe 7:</i>	79
I.4 Ebenen.....	80
I.4.1 Definition von Ebenen.....	80
I.4.2 Übungsaufgaben zur Ebenenkonstruktion.....	85
<i>Aufgabe 1:</i>	85
<i>Aufgabe 2:</i>	85
<i>Aufgabe 3:</i>	85
I.4.3 Lösungen:	85
<i>Aufgabe 1:</i>	85
<i>Aufgabe 2:</i>	85
<i>Aufgabe 3:</i>	85
I.4.4 Gute Ebene, böse Ebene.....	86
<i>Der Normalenvektor.....</i>	86
<i>Definition der Normalenform für Ebenen.....</i>	86
<i>Aufstellen des Normalenvektors.....</i>	88
<i>Kreuzprodukt:.....</i>	88
I.4.5 Aufgaben zu Ebenen.....	92
<i>Aufgabe 1:</i>	92
<i>Aufgabe 2:</i>	92
<i>Aufgabe 3:</i>	92
<i>Aufgabe 4:</i>	92
<i>Aufgabe 5:</i>	92
I.4.6 Lösungen:.....	93
<i>Aufgabe 1:</i>	93
<i>Aufgabe 2:</i>	93
<i>Aufgabe 3:</i>	93
<i>Aufgabe 4:</i>	93
<i>Aufgabe 5:</i>	93
I.4.7 Gegenseitige Lage von Ebenen.....	94
1. Verfahren: Beide Ebenen in Koordinatenform (unser persönlicher Favorit).....	94
2. Verfahren: Eine Ebenen in Koordinatenform, die andere in Parameterform (geht gerade noch)....	95

3. Verfahren: Beide Ebenen in Parameterform (bitte benutzt das nicht).....	96
I.4.8 Aufgaben zum Schnitt von Ebenen.....	100
Aufgabe 1:.....	100
Aufgabe 2:.....	100
Aufgabe 3:.....	100
Aufgabe 4:.....	100
Aufgabe 5:.....	100
I.4.9 Lösungen	101
Aufgabe 1:.....	101
Aufgabe 2:.....	101
Aufgabe 3:.....	101
Aufgabe 4:.....	101
Aufgabe 5:.....	101
I.5 Gegenseitige Lage von Gerade-Ebene.....	102
I.5.1 Definition.....	102
1. Verfahren: Ebene ist in Koordinatenform gegeben (unser Liebling):.....	102
2. Verfahren: Ebene ist in Parameterform gegeben:.....	103
I.5.2 Aufgaben zu Geraden und Ebenen.....	105
Aufgabe 1:	105
Aufgabe 2:.....	105
Aufgabe 3:.....	105
I.5.3 Lösungen.....	105
Aufgabe 1:.....	105
Aufgabe 2:.....	105
Aufgabe 3:	105
I.6 Spurpunkte und Spurgeraden von Ebenen.....	106
I.7 Abstände.....	107
I.7.1 Abstand Punkt-Punkt.....	107
I.7.2 Abstand Punkt-Gerade.....	107
I.7.3 Abstand Punkt-Ebene.....	110
Die Hesse'sche Normalenform (HNF).....	111
I.7.4 Abstand Ebene-Ebene (nur parallele Ebenen).....	112
I.7.5 Abstand Gerade-Ebene.....	112
I.7.6 Abstand Gerade-Gerade.....	112
Parallele Geraden:.....	112
Windschiefe Geraden:.....	112
I.7.7 Übungsaufgaben zu Abständen.....	113
Aufgabe 1:	113
Aufgabe 2:.....	113
Aufgabe 3:	113
Aufgabe 4:	113
Aufgabe 5:.....	113
Aufgabe 6:	113
Aufgabe 7:	113
Aufgabe 8:.....	114
Aufgabe 9:	114
I.7.8 Lösungen.....	114
Aufgabe 1:.....	114
Aufgabe 2:	114
Aufgabe 3:.....	114
Aufgabe 4:.....	114
Aufgabe 5:.....	114
Aufgabe 6:.....	114

<i>Aufgabe 7:</i>	114
<i>Aufgabe 8:</i>	115
<i>Aufgabe 9:</i>	115
I.8 Schnittwinkel.....	116
I.8.1 Winkel zwischen zwei Geraden.....	116
I.8.2 Winkel zwischen zwei Ebenen.....	116
I.8.3 Winkel zwischen Gerade und Ebene.....	117
I.8.4 Übungsaufgaben zu Schnittwinkeln.....	118
<i>Aufgabe 1:</i>	118
<i>Aufgabe 2:</i>	118
<i>Aufgabe 3:</i>	118
<i>Aufgabe 4:</i>	118
<i>Aufgabe 5:</i>	118
<i>Aufgabe 6:</i>	118
<i>Aufgabe 7:</i>	118
I.8.5 Lösungen.....	119
<i>Aufgabe 1:</i>	119
<i>Aufgabe 2:</i>	119
<i>Aufgabe 3:</i>	119
<i>Aufgabe 4:</i>	119
<i>Aufgabe 5:</i>	119
<i>Aufgabe 6:</i>	120
<i>Aufgabe 7:</i>	120
I.9 Projektion	121
I.9.1 Orthogonale Projektion eines Punktes in eine Ebene.....	121
I.9.2 Orthogonale Projektion einer Geraden in eine Ebene.....	121
I.9.3 Schatten.....	123
I.9.4 Übungsaufgaben zur Projektion.....	124
<i>Aufgabe 1:</i>	124
<i>Aufgabe 2:</i>	124
<i>Aufgabe 3:</i>	124
<i>Aufgabe 4:</i>	124
<i>Aufgabe 5:</i>	124
<i>Aufgabe 6:</i>	124
I.9.5 Lösungen.....	125
<i>Aufgabe 1:</i>	125
<i>Aufgabe 2:</i>	125
<i>Aufgabe 3:</i>	125
<i>Aufgabe 4:</i>	125
<i>Aufgabe 5:</i>	125
<i>Aufgabe 6:</i>	126
I.10 Spiegeln.....	127
I.10.1 Spiegeln eines Punktes an einem Punkt.....	127
I.10.2 Spiegeln eines Punktes an einer Ebene.....	127
I.10.3 Spiegeln einer Geraden an einer Ebene.....	128
<i>Fall 1: Gerade g schneidet Ebene in S.....</i>	128
<i>Fall 2: Gerade g parallel zu Ebene.....</i>	128
I.10.4 Spiegeln eines Punktes an einer Geraden.....	130
I.10.5 Übungsaufgaben zum Spiegeln.....	131
<i>Aufgabe 1: Spiegele die Punkte P an Q.....</i>	131
<i>Aufgabe 2: Berechne den Spiegelpunkt P'.....</i>	131
<i>Aufgabe 3: Spiegele folgende Geraden an der Ebene</i>	131

<i>Aufgabe 4:</i>	131
I.10.6 Lösungen	132
<i>Aufgabe 1:</i>	132
<i>Aufgabe 2:</i>	132
<i>Aufgabe 3:</i>	132
<i>Aufgabe 4:</i>	133
I.11 Wie geht man komplexere Aufgaben an?	134

I.5 Gegenseitige Lage von Gerade-Ebene

I.5.1 Definition

In I.3 habt ihr gelernt, wie man 2 Geraden auf ihre Lage zueinander untersucht, in I.4 habt ihr gelernt wie man 2 Ebenen auf ihre gegenseitige Lage untersucht. In diesem Kapitel lernt ihr nun, wie ihr eine Gerade auf ihre Lage zu einer Ebene untersucht.

Wie immer haben wir mehrere Möglichkeiten. Die Gerade kann parallel zur Ebene verlaufen (vgl. Abbildung 33) , in der Ebene verlaufen (vgl. Abbildung 34) oder sie kann die Ebene schneiden (Man sagt dann auch durchstoßen) (vgl. Abbildung 35) . Auch hier gilt wieder: Weg mit dem LGS.

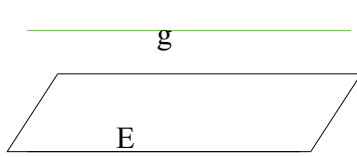


Abbildung 34: g parallel zu E

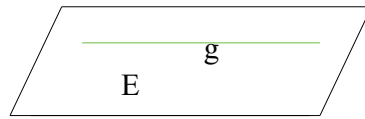


Abbildung 35: g in E

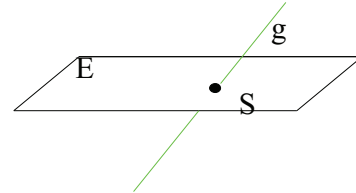


Abbildung 33: g schneidet E in S

1. Verfahren: Ebene ist in Koordinatenform gegeben (unser Liebling):

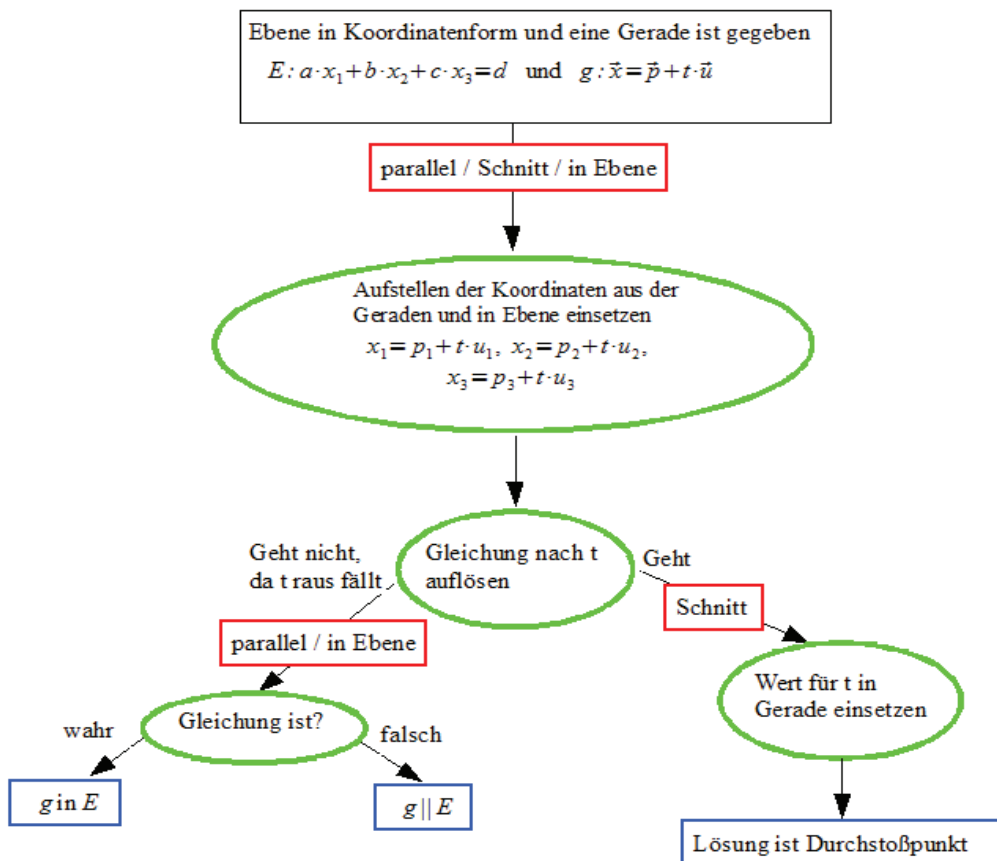


Abbildung 36: Schema zur Lagebestimmung zwischen Gerade und Ebene (Koordinatenform)

2. Verfahren: Ebene ist in Parameterform gegeben:

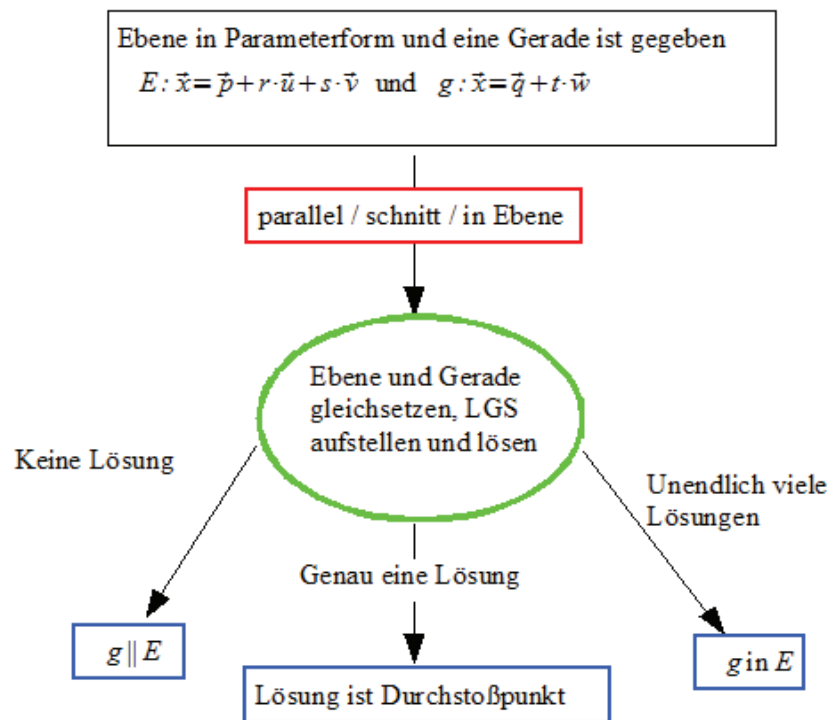


Abbildung 37: Schema zur Lagebestimmung zwischen Gerade und Ebene (Parameterform)

Wenn ihr das Spiel gute Ebene, böse Ebene beherrscht, ist es natürlich besser die Ebene zuerst in die Koordinatenform umzuwandeln und dann Verfahren 1 anzuwenden. Aber so geht es auch, dauert halt manchmal ein wenig länger.

Beispiel 1:

Untersuche die Lage der Geraden g bezüglich der Ebene E $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$E: 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = -1$. Wie man leicht sieht, lohnt es sich hier das Verfahren 1 anzuwenden. Also sind unsere Koordinaten: $x_1 = 1 + 3 \cdot t$
 $x_2 = 2 + 1 \cdot t$
 $x_3 = 1$

Somit lautet unsere Gleichung:

$$2 \cdot (1 + 3 \cdot t) + 3 \cdot (2 + 1 \cdot t) = -1 \Leftrightarrow 2 + 6 \cdot t + 6 + 3 \cdot t = -1 \Leftrightarrow 9 \cdot t = -9 \Leftrightarrow t = -1$$

In g eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ also ist unser Durchstoßpunkt } (-2|1|1)$$

Beispiel 2:

Gleiche Aufgabenstellung mit: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Wir nehmen jetzt mal Verfahren 2.

Also bilden wir das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$ daraus ergibt sich, dass sich die Zeile 3 eliminiert.

Also bleibt übrig $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Da wir nun eine Gleichung weniger haben, aber immer noch 3

Variablen, sehen wir sofort, dass wir unendlich viele Lösungen erhalten. Dies wiederum verrät uns, dass die Gerade in der Ebene liegen muss. (Genau genommen haben Ebenen und Gerade unendlich viele Punkte gemeinsam, weshalb die Gerade in der Ebene liegt)

Beispiel 3:

Überprüfe die Lage der Geraden g und der Ebene E .

$$E: -2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 12 \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 3 + 4 \cdot t$$

Nach Verfahren 1 lauten die Koordinaten der Geraden: $x_2 = 3 + 1 \cdot t$ und nach dem einsetzen in die Ebene:

$$x_3 = 3 + 2 \cdot t$$

$$(-2) \cdot (3 + 4 \cdot t) + 6 \cdot (3 + 1 \cdot t) + 1 \cdot (3 + 2 \cdot t) = 12$$

Nach kurzem heftigem Rechnen ergibt sich: $-6 - 8 \cdot t + 18 + 6 \cdot t + 3 + 2 \cdot t = 12 \Leftrightarrow 15 = 12$ Was natürlich eine falsche Aussage ist, und somit die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

Hinweis:

Eine Gerade g ist orthogonal zu einer Ebene E , falls der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E linear abhängig sind (vgl. Abbildung 39).

Sie sind parallel, wenn das Skalarprodukt von Richtungsvektor und Normalenvektor Null ergibt. $g \perp E \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ (vgl.).

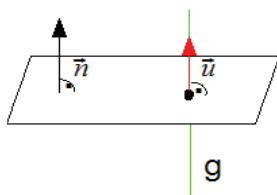


Abbildung 39: g senkrecht zu E

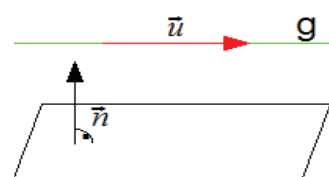


Abbildung 38: g parallel zu E

I.5.2 Aufgaben zu Geraden und Ebenen**Aufgabe 1:**

Bestimme die Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu der Ebene $E: 3 \cdot x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 = 5$

Aufgabe 2:

Welche Lage hat die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Wandle die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in Koordinatenform um und überprüfe ihre Lage zu

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I.5.3 Lösungen**Aufgabe 1:**

$g \parallel E$, also g ist parallel zu E

Aufgabe 2:

g liegt in E

Aufgabe 3:

g durchstößt E im Punkt $P\left(\frac{8}{6} \mid -\frac{1}{6} \mid \frac{7}{6}\right)$