Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

I – Potenzen
6 – Rationale Hochzahlen

Seite 22 Nr. 6

Die folgenden Wurzeln können am Besten vereinfacht werden, wenn man zuerst einmal die Zahl unter der Wurzel als Potenz schreibt, dann die ganze Wurzel als Potenz darstellt und anschließend entsprechend kürzt. Gegebenenfalls kann man danach die Potenz wieder als Wurzel schreiben.

a) $\sqrt[4]{100} = \sqrt[4]{10^2} = 10^{\frac{2}{4}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

b) $\sqrt[4]{25} = \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

c) $\sqrt{9^4} = 9^{\frac{4}{2}} = 9^2 = 81$

d) $\sqrt[6]{4^3} = 4^{\frac{3}{6}} = 4^{\frac{1}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2}} = 2$

e) $\sqrt[8]{25^4} = \sqrt[8]{\left(5^2\right)^4} = \sqrt[8]{5^8} = 5^{\frac{8}{8}} = 5$

f) $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{4^2} = \sqrt[8]{\left(2^2\right)^2} = \sqrt[8]{2^4} = 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

g) $\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{\left(3^2\right)^2} = \sqrt[6]{3^4} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$

h) $\sqrt[10]{16} = \sqrt[10]{4^2} = \sqrt[10]{\left(2^2\right)^2} = \sqrt[10]{2^4} = 2^{\frac{4}{10}} = 2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

I – Potenzen
6 – Rationale Hochzahlen

S. 23 Nr. 11

Bei den folgenden Aufgaben müssen jeweils Potenzen multipliziert bzw. dividiert werden, die den Selben Exponenten haben. Wir wenden also folgende Gesetze an:

Multiplikation: $a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n$

Division: $a^n \div b^n = (a \div b)^n$

a) $2^{\frac{1}{4}} \bullet 3^{\frac{1}{4}} = (2 \bullet 3)^{\frac{1}{4}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$

b) $4^{\frac{2}{5}} \bullet 2^{\frac{2}{5}} = (4 \bullet 2)^{\frac{2}{5}} = 8^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{8^2} = \sqrt[5]{(2^3)^2} = \sqrt[5]{2^6} = \sqrt[5]{2 \bullet 2^5} = \sqrt[5]{2} \bullet \sqrt[5]{2^5} = 2\sqrt[5]{2}$

c) $3^{-\frac{1}{2}} \bullet \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(3 \bullet \frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4}{5} \bullet \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

e) $3^{-\frac{2}{5}} \div 6^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{(3)^{\frac{2}{5}}} \div \frac{1}{(6)^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}} = \sqrt[5]{4}$

f) $10^{0,4} \div 2^{0,4} = (10 \div 2)^{0,4} = 5^{0,4} = 5^{\frac{4}{10}} = 5^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2} = \sqrt[5]{25}$

g) $x^{\frac{2}{3}} \div (2x)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{x}{2x}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

h) $(6x)^{\frac{1}{3}} \bullet \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6x}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$

i) $(2x)^{\frac{2}{3}} \div (3x)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2x}{3x}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

j) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \bullet \left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{5} \bullet \frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1^{-\frac{1}{2}} = 1$

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

I – Potenzen
9 – Vermischte Aufgaben

S. 28 Aufgabe 2

a) $\frac{4 \bullet 10^2 \bullet 10^4}{8 \bullet 10^8} = \frac{4 \bullet 10^6}{8 \bullet 10^8} = \frac{1}{2} \bullet 10^{6-8} = \frac{1}{2} \bullet 10^{-2} = \frac{1}{2 \bullet 10^2} = \frac{1}{2 \bullet 100} = \frac{1}{200}$

$\Downarrow\Rightarrow$ **oder** $0{,}5 \bullet 10^{-2} = 5 \bullet 10^{-3}$

b)
$\frac{15 \bullet 10^{-2}}{100 \bullet 10^4} \div (3 \bullet 10^{-1}) = 0{,}15 \bullet 10^{-2-4} \div (3 \bullet 10^{-1}) = \frac{0{,}15 \bullet 10^{-6}}{3 \bullet 10^{-1}} = 0{,}05 \bullet 10^{-6-(-1)} = 0{,}05 \bullet 10^{-6+1}$

$= 0{,}05 \bullet 10^{-5} = 5 \bullet 10^{-7}$

c) $\frac{12 \bullet 10^2 \bullet (10^3)^2}{(2 \bullet 10)^2} = \frac{12 \bullet 10^2 \bullet 10^6}{4 \bullet 10^2} = \frac{12 \bullet 10^8}{4 \bullet 10^2} = 3 \bullet 10^{8-2} = 3 \bullet 10^6$

d) $\frac{0{,}01 \bullet 10^6 \bullet 400}{(20 \div 5)^2} = \frac{10^{-2} \bullet 10^6 \bullet 4 \bullet 10^2}{4^2} = \frac{4^1 \bullet 10^6}{4^2} = \frac{1}{4} \bullet 10^6 = 0{,}25 \bullet 10^6 = 2{,}5 \bullet 10^5$

e) $\frac{14^3 \bullet 15^5}{25^5 \bullet 28^4} = \frac{14^3 \bullet (3 \bullet 5)^5}{(5^2)^5 \bullet (2 \bullet 14)^4} = \frac{14^3 \bullet 3^5 \bullet 5^5}{5^{10} \bullet 2^4 \bullet 14^4} = 14^{3-4} \bullet 5^{5-10} \bullet \frac{3^5}{2^4} = 14^{-1} \bullet 5^{-5} \bullet \frac{3^5}{2^4}$

$= \frac{3^5}{14 \bullet 5^5 \bullet 2^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \bullet \frac{1}{2 \bullet 7 \bullet 2^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \bullet \frac{1}{7} \bullet 2^{-5}$

f) $\frac{(2^4 \bullet 15^3)^2}{5^8 \bullet 7^2 \bullet 12^6} = \frac{2^8 \bullet 15^6}{5^8 \bullet 7^2 \bullet 12^6} = \frac{2^8 \bullet (3 \bullet 5)^6}{5^8 \bullet 7^2 \bullet (2 \bullet 6)^6} = \frac{2^8 \bullet 3^6 \bullet 5^6}{5^8 \bullet 7^2 \bullet 2^6 \bullet 6^6} = \frac{2^8 \bullet 3^6 \bullet 5^6}{5^8 \bullet 7^2 \bullet 2^6 \bullet 2^6 \bullet 3^6}$

$= \frac{2^{8-6} \bullet 5^{6-8}}{7^2 \bullet 2^6} = \frac{2^2 \bullet 5^{-2}}{7^2 \bullet 2^6} = \frac{2^{2-6}}{(7 \bullet 5)^2} = \frac{2^{-4}}{35^2} = \frac{1}{35^2 \bullet 2^4} = \frac{1}{35^2 \bullet 4^2} = \frac{1}{140^2} = 140^{-2}$

Ich glaube man sieht jetzt schon wie das immer läuft. Man muss größere Zahlen in Faktoren zerlegen und die Hochzahlen dann nur auf beide Zahlen verteilen. Wenn man wenig Erfahrung hat sieht man nur schwer wie das Ganze am schnellsten läuft, deswegen einfach mit Mut mal zerlegen. So viel Möglichkeiten gibt’s meistens nicht.

g) $\frac{8 \bullet 5^7 - 5^8}{5^8 \bullet 2^6} = \frac{2^3 \bullet 5^7 - 5^8}{5^8 \bullet 2^6}$ **Vorsicht**, wer jetzt versucht die 5^8 im Zähler mit der 5^8 im Nenner zu kürzen macht einen **Riesenfehler**. Ihr kennt ja den Spruch: Aus Summen kürzen nur die...

Also, Ihr könnt nur mit der Zahl kürzen, die in jedem Summand steckt. Und diese müsst Ihr ausklammern:

$$\frac{5^7 \bullet \left(2^3 - 5^1\right)}{5^8 \bullet 2^6}$$

Das Prinzip ist: Welche Zahl ausgeklammert gibt reinmultipliziert wieder die alte Zahl?

$\frac{2^3 - 5}{5 \bullet 2^6} = \frac{8-5}{5 \bullet 2^6} = \frac{3}{5 \bullet 2^6}$ oder in Normdarstellung (mit 2 erweitern):

$\frac{2 \bullet 3}{2 \bullet 5 \bullet 2^6} = 0{,}6 \bullet 2^{-6} = 6 \bullet 2^{-7}$

Wenn Ihr die Gesetze aus „Allgemeines zum Kapitel Potenzieren" anschaut, dann könnt Ihr sehen, dass die Gesetze auch von rechts nach links in diesen Aufgaben anzuwenden sind.

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

I – Potenzen
9 – Vermischte Aufgaben

Seite 28 Nr. 4

Bei dieser Aufgabe müsst Ihr Euch wieder an „Allgemeines zu Potenzen" erinnern. Dort haben wir erklärt, dass $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ist bzw. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ usw.
Ansonsten gelten alle Rechenregeln weiterhin wie bisher. Natürlich sollte man damit auch das Bruchrechnen noch beherrschen, sonst wird man Schwierigkeiten haben.
Deshalb eine schnelle Wiederholung:

1) Bei Addition und Subtraktion von Brüchen müssen diese gleichnamig gemacht werden, d.h. auf den gleichen Nenner bringen, dann nur noch Zähler addieren und Nenner beibehalten.

2) Bei Multiplikation einfach Zähler • Zähler und Nenner • Nenner.

3) Bei Division wird mit dem Kehrwert des 2. Bruches eine Multiplikation durchgeführt.

a) $\sqrt[3]{4} \bullet \sqrt[3]{2} = 4^{\frac{1}{3}} \bullet 2^{\frac{1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} \bullet 2^{\frac{1}{3}} = 2^{2\bullet\frac{1}{3}} \bullet 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

b) $\sqrt[3]{54} \div \sqrt[3]{2} = 54^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{54}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{3\bullet\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$

c) $\sqrt[3]{x^2} \div \sqrt[3]{x} = \left(\frac{x^2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

d) $\sqrt{a} \bullet \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}} \bullet \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7}$

Anmerkung: Die Zahl im Nenner der Hochzahl ist die Größe der Wurzel. Die Zahl im Zähler der Hochzahl ist die Größe der Potenz. Immer.

e) $\left(\sqrt{a} \bullet \sqrt[3]{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = a^{2\bullet\frac{1}{2}} \bullet a^{2\bullet\frac{1}{3}} = a^1 \bullet a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{a^5}$

f) $x \div \left(\sqrt{x} \bullet \sqrt[3]{x}\right) = x \div \left(x^{\frac{1}{2}} \bullet x^{\frac{1}{3}}\right) = x \div x^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = x \div x^{\frac{5}{6}} = \frac{x^1}{x^{\frac{5}{6}}} = x^{\frac{6}{6}-\frac{5}{6}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$

g)

$$\sqrt[3]{a^5 \bullet b} \bullet \sqrt[3]{a \bullet b^2} = \left(a^5 \bullet b\right)^{\frac{1}{3}} \bullet \left(a \bullet b^2\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{5+1} \bullet b^{1+2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^6 \bullet b^3\right)^{\frac{1}{3}} = a^{6 \bullet \frac{1}{3}} \bullet b^{3 \bullet \frac{1}{3}} = a^2 \bullet b$$

h) $\sqrt[3]{a^2} \bullet \sqrt{a} \bullet \sqrt[6]{a^5} =$

Jetzt sieht man ja wie es läuft: Am Besten das Wurzelsymbol in eine Hochzahl umschreiben, indem man die Wurzelzahl als Nenner und die Potenz des Buchstabens als Zähler nimmt.

Also: $a^{\frac{2}{3}} \bullet a^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$

i) $\sqrt{\sqrt{a^3}} \bullet \sqrt{a} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} \bullet a^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \bullet a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}} \bullet a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}} = a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{a^5}$

j) $\left(a \bullet \sqrt[3]{a}\right) \div \left(a^2 \bullet \sqrt[3]{a}\right) = a^{1+\frac{1}{3}} \div a^{2+\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \div a^{\frac{7}{3}} = a^{\frac{4}{3}-\frac{7}{3}} = a^{-\frac{3}{3}} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

Ich hoffe, dass Ihr seht wie das Grundprinzip immer funktioniert, weil ab jetzt größere und mehr Terme pro Aufgabe kommen.

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

I – Potenzen
9 – Vermischte Aufgaben

Seite 28 Nr. 5

Bei dieser Aufgabe sollte man sich wieder an die binomischen Formeln erinnern. D.h. es wird eigentlich fast immer nur die 3.binomische Formel abgeprüft. Solche Aufgaben sind für die zentrale Klassenarbeit wichtig.

3. binom. Formel: $(a+b)\bullet(a-b)=a^2-b^2$. Genau dies wird von mir in den kommenden Teilaufgaben angewandt.

a)

$$\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)\bullet\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)=\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2=5^2\bullet\sqrt{2}^2-2^2\bullet\sqrt{5}^2=25\bullet 2-4\bullet 5=50-20=30$$

b) $\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\bullet\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)=\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2=$ Trifft Wurzel und „hoch 2" also „im Quadrat" aufeinander, dann löschen sich diese immer gegenseitig aus. (Sagt das aber nie einem Lehrer. Diese Ausdruckweise ist „nicht mathematisch").

Damit also: $x+h-x=h$, toll!

c) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\bullet\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2y}\right)=$ Hier darf man natürlich nicht sofort die 3. binom. Formel anwenden, da unter den Wurzeln verschiedene Terme in den Klammern stehen. Entweder man rechnet es jetzt ganz „normal", d.h. jedes mit jedem mal nehmen oder, der pfiffige Schüler, klammert in der 2.Klammer $\sqrt{2}$ aus:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\bullet\sqrt{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\sqrt{2}\bullet\left(\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2\right)=\sqrt{2}\bullet(x-y)$$

d)

$$\left(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{b^2}\right)\bullet\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{b^2}\right)=\left(a^{\frac{2}{4}}+b^{\frac{2}{4}}\right)\bullet\left(a^{\frac{2}{4}}-b^{\frac{2}{4}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\bullet\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\bullet\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

$$=\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2=a-b$$

Man kann natürlich hier auch sofort die 3. binom. Formel anwenden, ohne dass man die Bruch-Hochzahlen vorher kürzt. Das Ergebnis bleibt das Gleiche.

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

I – Potenzen
9 – Vermischte Aufgaben

Seite 28 Nr. 6

Bei dieser Aufgabe sollte man sich gut mit dem eigentlichen Wurzelrechnen auskennen. Dies wurde ja ab Klasse 9 schon ein wenig trainiert:

1) Bei Multiplikation und Division verschiedener Wurzelterme, kann man diese unter ein Wurzelzeichen zusammenziehen.

2) Das gilt für die Addition und Subtraktion verschiedener Wurzelterme *nicht*.

a) $\left(\sqrt{ax}-\sqrt{abx}\right):\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{ab}$ oder ausgeklammert: $\sqrt{a}\left(1-\sqrt{b}\right)$.

b) $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\bullet\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=$
hier kann man nix ausklammern, deswegen muss man jedes mit jedem multiplizieren:

$$=\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\bullet\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$$

$$=a^1-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^1=$$

Wie man erkennen kann, kürzen sich die mittleren Terme mit den Bruch-Hochzahlen raus. Übrig bleibt als Lösung: $a+b$.

c) $(x-y):\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

hier bedient man sich am Besten eines kleinen Tricks, da man sonst nix machen kann. Der Trick ist, dass man die 3.binom. Formel in umgekehrter Weise anwendet: $x-y$ kann man dann als $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\bullet\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ schreiben (mal drüber nachdenken, dann leuchtet es ein).

Also: $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\bullet\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

d) $\left(a\sqrt{ax}-x\sqrt{ax}\right):\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)=\dfrac{\sqrt{ax}(a-x)}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{ax}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\bullet\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

$=\sqrt{ax}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)$ oder, wenn man reinmultipliziert: $a\sqrt{x}+x\sqrt{a}$.

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.
© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
4 – Exponentialgleichungen Logarithmus

Seite 44 Nr.13

Diese Aufgabe zeigt eine Umrechnungsformel von Logarithmen.
Zuerst anhand eines Zahlenbeispiels und danach die Herleitung mit Variablen.

a) $_2\log 16 \bullet {}_{16}\log 256 = {}_2\log 256$

$_2\log 16 = x \Rightarrow 16 = 2^4 \Rightarrow x = 4$

$_{16}\log 256 = x \Rightarrow 256 = 16^2 \Rightarrow x = 2$

$_2\log 256 = x \Rightarrow 256 = 2^8 \Rightarrow x = 8$

daraus ergibt sich: $4 \bullet 2 = 8$

$_3\log 9 \bullet {}_9\log 81 = {}_3\log 81$

$_3\log 9 = x \Rightarrow 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$

$_9\log 81 = x \Rightarrow 81 = 9^2 \Rightarrow x = 2$

$_3\log 81 = x \Rightarrow 81 = 3^4 \Rightarrow x = 4$

daraus ergibt sich: $2 \bullet 2 = 4$

b) Es soll $_a\log b \bullet {}_b\log c = {}_a\log c$ nachgewiesen werden.

$_a\log b = x \Rightarrow b = a^x$ (1)

$_b\log c = y \Rightarrow c = b^y$ (2)

$_a\log c = z \Rightarrow c = a^z$ (3)

und somit ist: $x \bullet y = z$

Gl. (1) in Gl. (2) : $c = (a^x)^y$ (2')
Gl. (2') und Gl. (3) gleichsetzen: $(a^x)^y = c = a^z$
ergibt: $x \bullet y = z$

c) Es soll gezeigt werden, dass Logarithmen zu beliebiger Basis, $_b\log a$, mit Zehnerlogarithmen, $_{10}\log a$ und $_{10}\log b$, berechnet werden können.
Wir nehmen die Formel aus b): $_a\log b \bullet {}_b\log c = {}_a\log c$ und setzen a = 10
Und erhalten somit $_{10}\log b \bullet {}_b\log c = {}_{10}\log c$ (10 kann weggelassen werden)

$\log b \bullet {}_b\log c = \log c$ (teilen durch log b)

$_b\log c = \frac{\log c}{\log b}$

Wir berechnen jetzt $_7\log 12$ mit der obigen Formel: $_7\log 12 = \frac{\log 12}{\log 7} = \frac{1{,}0792}{0{,}8451} = 1{,}2770$

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
4 – Exponentialgleichungen Logarithmus

Seite 44 Nr. 14

Gegeben ist eine Formel nach WEBER-FECHNER, in der die Beziehung zwischen der Intensität I des Reizes und der Lautstärke L, in der wir den Ton hören, dargestellt wird.

Die Formel lautet: $L = 10 \bullet \log \frac{I}{I_0}$ (I_0 ist die Intensität bei der wir den Ton gerade noch hören.)

a) gefragt wird wie sich die Lautstärke ändert wenn die Reizintensität von $I = 1.000\ I_0$ um $20.000\ I_0$ auf $I = 21.000\ I_0$ gesteigert wird, bzw. von $I = 10.000\ I_0$ auf $30.000\ I_0$ und $I = 100.000\ I_0$ auf $120.000\ I_0$.

Man setzt nun in die Formel ein:

$I = 1.000\ I_0 \Rightarrow L = 10 \bullet \log \frac{1.000 I_0}{I_0}$ (I_0 gekürzt)
$= 10 \bullet \log 1.000 = 30$ dB

$I = 21.000\ I_0 \Rightarrow L = 10 \bullet \log \frac{21.000 I_0}{I_0}$ (I_0 gekürzt)
$= 10 \bullet \log 21.000 = 43{,}22$ dB

Die Lautstärke nimmt also um 13,22 dB zu.

$I = 10.000\ I_0 \Rightarrow L = 10 \bullet \log \frac{10.000 I_0}{I_0}$
$= 10 \bullet \log 10.000 = 40$ dB

$I = 30.000\ I_0 \Rightarrow L = 10 \bullet \log \frac{30.000 I_0}{I_0}$
$= 10 \bullet \log 30.000 = 44{,}77$ dB

Die Lautstärke nimmt also um 4,77 dB zu.

$I = 100.000\ I_0 \Rightarrow L = 10 \bullet \log \frac{100.000 I_0}{I_0}$
$= 10 \bullet \log 100.000 = 50$ dB

$I = 120.000\ I_0 \Rightarrow L = 10 \bullet \log \frac{120.000 I_0}{I_0}$
$= 10 \bullet \log 120.000 = 50{,}79$dB

Die Lautstärke nimmt also um 0,79 dB zu.

b) Bei einer Lautstärke von L = 40 dB haben wir eine Reizintensität I von:

$L = 40 = 10 \bullet \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \log I = 4 \Rightarrow 10^I = 4 \Rightarrow I = 10.000\ I_0$

Bei einer Verdoppelung der Lautstärke auf L = 80 dB :

$L = 80 = 10 \bullet \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \log I = 8 \Rightarrow 10^I = 8 \Rightarrow I = 100.000.000\ I_0$

Dies bedeutet dass bei einer Verdoppelung der Lautstärke sich die Reizintensität um das 10.000-fache verstärkt ($\frac{100.000.000}{10.000} = 10.000$).

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
5 – Rechnen mit Logarithmen

Seite 47 Nr. 5

Der Logarithmen sollen mit Hilfe der Sätze

$$_b\log u * v = {}_b\log u + {}_b\log v$$
$$_b\log \tfrac{u}{v} = {}_b\log u - {}_b\log v$$
$$_b\log u^v = v \bullet {}_b\log u$$

vereinfacht werden.

a) $\log u^2 - \log u = 2 \bullet \log u - \log u = \log u$

b) $\log x^3 - 2\log \frac{1}{x} = 3 \bullet \log x - 2 \bullet (\log 1 - \log x) = 3 \bullet \log x - 2 \bullet (-\log x) = 5 \log x$

c) $\log a \bullet b - \log a^2 \bullet b = \log a + \log b - (2 \bullet \log a + \log b) = -\log a$

d) $\log r + \log \frac{1}{r} - \log r^2 = \log r + \log 1 - \log r - 2 \bullet \log r = -2\log r$

e) $\log \frac{1}{x} - \log \frac{2}{x} - \log \frac{3}{x} = \log 1 - \log x - (\log 2 - \log x) - (\log 3 - \log x)$
$= \log x - \log 2 - \log 3 = \log x - (\log 2 + \log 3)$
$= \log x - \log 2 \bullet 3 = \log x - \log 6 = \log \frac{x}{6}$

f) $2\log \frac{1}{a} + \log a^2 - \log 2a = 2(\log 1 - \log a) + 2 \bullet \log a - (\log 2 + \log a)$
$= -2\log a + 2\log a - \log 2 - \log a$
$= -(\log 2 + \log a) = -\log 2a$

g) $\log x - \log \sqrt{x} + \log \frac{1}{\sqrt{x}} = \log x - \log x^{\frac{1}{2}} + \log 1 - \log x^{\frac{1}{2}} = \log x - \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{2}\log x = 0$

h) $(\log x^2) : (\log x) - 2 = \frac{2\log x}{\log x} - 2 = 2 - 2 = 0$

i) $\left[(\log\sqrt{b}) : (0{,}5\log b)\right] \bullet \log \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2}\log b}{\frac{1}{2}\log b} \bullet (-\frac{1}{2}\log b) = 1 \bullet (-\frac{1}{2}\log b) = -\frac{1}{2}\log b$

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
5 – Rechnen mit Logarithmen

Seite 47 Nr.9

Hier sollen Gleichungen nach x aufgelöst werden indem eine neue Variable für eine Potenz eingeführt wird.

a) $5^{2x} - 3 \bullet 5^{x} = 0$ Wir setzen die Variable a für 5^{x} ein und erhalten damit:

$a^{2} - 3 \bullet a = 0$

$a(a - 3) = 0$ 1.Lösung $a = 0$

$a - 3 = 0$

$a = 3$ 2.Lösung $a = 3$

Nun setzen wir in $a = 5^{x}$ ein: $0 = 5^{x}$ durch logarithmieren erhält man:

$\log 0 = x \bullet \log 3$ log 0 ist nicht definiert!!!

2.Lösung: $3 = 5^{x}$

$\log 3 = x \bullet \log 5$

$x = \frac{\log 5}{\log 3} = 0{,}6826$

b) $(2^{x})^{2} - 3 \bullet 2^{x} + 2 = 0$ Wir setzen die Variable a für 2^{x} ein und erhalten damit

$a^{2} - 3 \bullet a + 2 = 0$ quadratische Gleichung!!

$a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \bullet 1 \bullet 2}}{2 \bullet 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$

$a_1 = \frac{4}{2} = 2$ eingesetzt in $a = 2^{x} \Rightarrow 2 = 2^{x} \Rightarrow \log 2 = x \bullet \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$

$a_2 = \frac{2}{2} = 1$ eingesetzt in $a = 2^{x} \Rightarrow 1 = 2^{x} \Rightarrow \log 1 = x \bullet \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log 1}{\log 2} = 0$

c) $2 \bullet 3^{2x} - 7 \bullet 3^{x} + 3 = 0$ Wir setzen die Variable a für 3^{x} ein und erhalten damit

$2 \bullet a^{2} - 7 \bullet a + 3 = 0$ quadratische Gleichung

$a_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \bullet 2 \bullet 3}}{2 \bullet 2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$

$a_1 = \frac{12}{4} = 3$ eingesetzt in $a = 3^{x} \Rightarrow 3 = 3^{x} \Rightarrow \log 3 = x \bullet \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 3} = 1$

$a_2 = \frac{1}{2}$ eingesetzt in $a = 3^{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = 3^{x} \Rightarrow \log 0{,}5 = x \bullet \log 3$

$\Rightarrow x = \frac{\log 0{,}5}{\log 3} = -0{,}6309$

d) $3^{2x} + 2 \bullet 3^{x} - 15 = 0$ Wir setzen die Variable a für 3^{x} ein und erhalten damit

$a^{2} + 2 \bullet a - 15 = 0$ quadratische Gleichung

$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \bullet 1 \bullet (-15)}}{2 \bullet 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$

$a_{1} = \frac{6}{2} = 3$ eingesetzt in $a = 3^{x} \Rightarrow 3 = 3^{x} \Rightarrow \log 3 = x \bullet \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 3} = 1$

$a_{2} = -\frac{10}{2}$ eingesetzt in $a = 3^{x} \Rightarrow -5 = 3^{x} \Rightarrow$ log -5 ist nicht definiert

e) $7^{2x} + 5 \bullet 7^{x} = -4$ Wir setzen die Variable a für 7^{x} ein und erhalten damit

$a^{2} + 5 \bullet a + 4 = 0$ quadratische Gleichung

$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4 \bullet 1 \bullet 4}}{2 \bullet 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$a_{1} = \frac{-2}{2} = -1$ eingesetzt in $a = 7^{x} \Rightarrow -1 = 7^{x} \Rightarrow$ log –1 ist nicht definiert

$a_{2} = -\frac{8}{2} = -4$ eingesetzt in $a = 7^{x} \Rightarrow -4 = x \bullet \log -4$ log –4 ist nicht definiert

also keine Lösung

f) $32 \bullet 0{,}5^{2x} + 3 = 28 \bullet 0{,}5^{x}$ Wir setzen die Variable a für $0{,}5^{x}$ ein und erhalten damit

$32 \bullet a^{2} - 28 \bullet a + 3 = 0$ quadratische Gleichung

$a_{1,2} = \frac{28 \pm \sqrt{784-4 \bullet 32 \bullet 3}}{2 \bullet 32} = \frac{28 \pm \sqrt{400}}{64}$

$a_{1} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$ eingesetzt in $a = 0{,}5^{x} \Rightarrow \frac{3}{4} = 0{,}5^{x} \Rightarrow \log \frac{3}{4} = x \bullet \log 0{,}5$

$\Rightarrow x = \frac{\log \frac{3}{4}}{\log 0{,}5} = 0{,}415$

$a_{2} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ eingesetzt in $a = 0{,}5^{x} \Rightarrow \frac{1}{8} = 0{,}5^{x} \Rightarrow \log \frac{1}{8} = x \bullet \log 0{,}5$

$\Rightarrow \quad x = \frac{\log \frac{1}{8}}{\log 0{,}5} = 3$

g) $2^{2x-1} + 3 \bullet 2^{x} = 8$ umgeformt mit den Potenzgesetzen $a^{m-n} = a^{m} \div a^{n}$

$2^{2x} \div 2^{1} + 3 \bullet 2^{x} = 8$ Variable a für 2^{x}

$\frac{a^{2}}{2} + 3 \bullet a - 8 = 0$ quadratische Gleichung

$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \bullet 0{,}5 \bullet (-8)}}{2 \bullet 0{,}5} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{1}$

$a_{1} = 2$ eingesetzt ergibt $a = 2 = 2^{x} \Rightarrow \log 2 = x \bullet \log 2 \Rightarrow x = 1$

$a_{2} = -8$ Logarithmus einer negativen Zahl ist nicht definiert.

h) $4 \bullet 3^{-x} + 5 + 3^{x} = 0$ wir formen 3^{-x} in $\frac{1}{3^x}$ um

$4 \bullet \frac{1}{3^x} + 5 + 3^{x} = 0$ Nun setzen wir die Variable a für 3^{x} ein

$4 \bullet \frac{1}{a} + 5 + a = 0$ wir multiplizieren mit a

$4 + 5 \bullet a + a^2 = 0$ quadratische Gleichung

$a^2 + 5 \bullet a + 4 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \bullet 1 \bullet 4}}{2 \bullet 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$ siehe Aufgabe e) a_1 und a_2 sind negativ also keine Lösung

i) $16 \bullet 6^{-x} + 6^{x} = 10$ wir formen 6^{-x} in $\frac{1}{6^x}$ um

$16 \bullet \frac{1}{6^x} + 6^{x} - 10 = 0$ Nun setzen wir die Variable a für 6^{x} ein

$16 \bullet \frac{1}{a} + a - 10 = 0$ multiplizieren mit a

$16 + a^2 - 10 \bullet a = 0$

$a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \bullet 1 \bullet 16}}{2 \bullet 1} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2}$

$a_1 = \frac{16}{2} = 8$ eingesetzt ergibt $a = 8 = 6^{x} \Rightarrow \log 8 = x \bullet \log 6$

$\Rightarrow x = \frac{\log 8}{\log 6} = 1{,}1606$

$a_2 = \frac{4}{2} = 2$ eingesetzt ergibt $a = 2 = 6^{x} \Rightarrow \log 2 = x \bullet \log 6$

$\Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 6} = 0{,}3869$

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
8 – Vermischte Aufgaben

Seite 52 Nr. 5

Hier haben wir ein Schaubild mit einer x-Achse und y-Achse und 3 Geraden. Für diese Geraden sollen wir jetzt die Geradengleichung aufstellen. Anhand der Koordinatenachsen können wir Punkte, die auf den Geraden liegen, bestimmen.

a) Die Geradengleichung lautet: $f(x) = a \bullet x + b$
Für die genaue Bestimmung der Gleichung mit den Variablen a und b brauchen wir zwei Punkte auf der jeweiligen Gerade.

Wir betrachten Gerade h mit der Formel: $h(x) = y = a \bullet x + b$
Nun suchen wir uns zwei Punkte: $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$
$P_1\ (x_1 = 1/y_1 = 0)$ und $P_2(x_2 = 2/y_2 = 8)$
Setzen wir nun P_1 in $h(x) = y_1 = a \bullet x_1 + b$ ein
$P_1\ (1/0)$: $0 = a \bullet 1 + b$ wir formen um so dass b alleine steht
$-a \bullet 1 = b$ (1)
Nun setzen wir P_2 in $h(x) = y_2 = a \bullet x_2 + b$ ein
$P_2(\ 2/8)$: $8 = a \bullet 2 + b$ (2)

Nun setzen wir b aus (1) in (2) ein: $8 = a \bullet 2 + (-a \bullet 1)$ und lösen nach a auf.
$8 = a$ dies setzen wir in (1)
$-8 = b$ und somit lautet

$h(x) = a \bullet x + b$ $h(x) = 8 \bullet x - 8$

Gerade g: $g(x) = y = a \bullet x + b$ mit $G_1(x_1/y_1)$ und $G_2(x_2/y_2)$
$G_1(0/5)$ und $G_2(3/10)$
G_1 in $g(x)$: $5 = a \bullet 0 + b$ wir formen um so dass b alleine steht
$5 = b$ (1)

G_2 in $g(x)$: $10 = a \bullet 3 + b$ (2) nun setzen wir (1) in (2) ein
$10 = a \bullet 3 + 5$ und lösen nach a auf
$10 - 5 = a \bullet 3$
$\frac{5}{3} = a$ somit lautet
$g(x) = \frac{5}{3} \bullet x + 5$

Gerade k: $k(x) = y = a \bullet x + b$ mit $K_1(0/20)$ und $K_2(1/17)$

K_1 in k(x): $20 = a \bullet 0 + b$ (1)

$20 = b$

K_2 in k(x): $17 = a \bullet 1 + b$ (2) wir setzen nun (1) in (2) nach a auflösen

$17 = a \bullet 1 + 20$

$17 - 20 = a$

$-3 = a$

$k(x) = -3 \bullet x + 20$

b) Die drei Geraden schneiden sich. Es sollen die Schnittpunkte berechnet werden.
Der Schnittpunkt wird berechnet indem man die Gleichungen gleichsetzt.

Schnittpunkt von g(x) und h(x) wird auch $g(x) \cap h(x)$ geschrieben:

$$g(x) = h(x)$$
$$\frac{5}{3} \bullet x + 5 = 8 \bullet x - 8$$
$$\frac{5}{3} \bullet x - 8 \bullet x = -8 - 5$$
$$\frac{5}{3} \bullet x - \frac{8 \bullet x \bullet 3}{3} = -13$$
$$-\frac{19}{3} \bullet x = -13$$
$$x = \frac{13 \bullet 3}{19} = \frac{39}{19}$$

Diesen x-Wert entweder in g(x) oder h(x) eingesetzt ergibt den dazugehörigen y-Wert.

$$g(x) = \frac{5}{3} \bullet \frac{39}{19} + 5$$
$$= \frac{65}{19} + \frac{5 \bullet 19}{19}$$
$$= \frac{160}{19}$$

$$g(x) \cap h(x) \Rightarrow A\left(\frac{39}{19} / \frac{160}{19}\right)$$

Schnittpunkt g(x) und k(x):

$$g(x) = k(x)$$
$$\frac{5}{3} \bullet x + 5 = -3 \bullet x + 20$$
$$x \bullet \left(\frac{5}{3} + \frac{3 \bullet 3}{3}\right) = 20 - 5$$
$$x \bullet \frac{14}{3} = 15$$
$$x = \frac{15 \bullet 3}{14} = \frac{45}{14}$$
$$g\left(\frac{45}{14}\right) = \frac{5 \bullet 45}{3 \bullet 14} + 5$$
$$= \frac{75}{14} + \frac{5 \bullet 14}{14} = \frac{145}{14}$$

$$g(x) \cap k(x) \Rightarrow B\left(\frac{45}{14} / \frac{145}{14}\right)$$

Schnittpunkt h(x) und k(x):

$$h(x) = k(x)$$
$$8 \bullet x - 8 = -3 \bullet x + 20$$
$$8 \bullet x + 3 \bullet x = 20 + 8$$
$$11 \bullet x = 28$$
$$x = \frac{28}{11}$$
$$h\left(\frac{28}{11}\right) = 8 \bullet \frac{28}{11} - 8$$
$$= \frac{224}{11} - \frac{8 \bullet 11}{11} = \frac{136}{11}$$

$$h(x) \cap k(x) \Rightarrow C\left(\frac{28}{11} / \frac{136}{11}\right)$$

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
8 – Vermischte Aufgaben

Seite 53 Nr.10

Gegeben ist eine Exponentialfunktion mit der Zuordnungsvorschrift:

$$f(x) = 0{,}4 \bullet 10^{x}$$

Diese Funktion soll nun untersucht, also Schnittpunkte und Besonderheiten herausgefunden wird.

a) Gesucht ist der Schnittpunkt mit der y-Achse. Der Schnittpunkt mit der y-Achse bedeutet immer dass x = 0 ist.

Also suchen wir den zu x = 0 passenden y-Wert:

$$f(x=0) = 0{,}4 \bullet 10^{0} = 0{,}4 \bullet 1 = 0{,}4$$

Schnittpunkt S(0/0,4)

b) Gesucht ist der Schnittpunkt mit der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt A(2/0).
Wir benötigen als erstes die Gleichung der Parallelen.
Eine Parallele zur y-Achse bedeutet dass für alle y-Werte nur ein x-Wert existiert. Dieser Wert ist in unserem Fall x = 2, da die Parallele durch den Punkt A(2/0) geht.

Also lautet die Zuordnungsvorschrift: x = 2.

Setzen wir nun x = 2 in die Gleichung f(x) ein so erhalten wir den dazugehörigen y-Wert für den Schnittpunkt.

$$f(x=2) = y$$
$$0{,}4 \bullet 10^{2} = 0{,}4 \bullet 100 = 40$$

Der Punkt hat die Koordinaten Q(2/40)

Gesucht ist der Schnittpunkt mit der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt B(0/3).
Eine Parallele zur x-Achse bedeutet, dass für alle x-Werte ein y-Wert existiert. Dieser Wert ist hier y = 3.
Also lautet die Zuordnungsvorschrift: y = 3.

Setzen wir nun y = 3 in die Gleichung f(x) ein so erhalten wir den dazugehörigen x-Wert für den Schnittpunkt.

$$f(x) = y = 3 = 0{,}4 \bullet 10^{x}$$
$$\frac{3}{0{,}4} = 10^{x}$$
$$\log 7{,}5 = x \bullet \log 10 \qquad \text{wobei } (\log 10 = 1)$$
$$\log 7{,}5 = x$$

Der Punkt hat die Koordinaten R(log7,5/3)

c) Für welche x-Werte sind die y-Werte kleiner als 0,1.

Bedingung: $f(x) = 0{,}4 \bullet 10^{x} < 0{,}1$

$10^{x} < \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$

$x \bullet \log 10 < \log 0{,}25$

$x < \log 0{,}25$

Für welche x-Werte sind die y-Werte größer als 400.

Bedingung: $f(x) = 0{,}4 \bullet 10^{x} > 400$

$10^{x} > \frac{400}{0{,}4}$

$x \bullet \log 10 > \log 1000$

$x > 3$

Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
8 – Vermischte Aufgaben

Seite 53 Nr.12

Wir haben eine Exponentialfunktion f(x) = a^x. Gesucht ist die Basis a, sodass für alle x der Funktionswert von f(x+1) um

a) 20% größer ist als f(x). Dies bedeutet, dass f(x) = 100% und f(x+1) = 120% ist.

Bedingung: f(x) = a^x = 100

f(x+1) = $a^{(x+1)}$ = 120

Wir müssen nun den Zweisatz anwenden und nach a auflösen.

$$\frac{a^x}{a^{(x+1)}} = \frac{100}{120}$$

$$\frac{a^x}{a^x \bullet a^1} = \frac{1}{1,2} \qquad a^x \text{ gekürzt}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1,2}$$

a = 1,2

b) 5% kleiner ist als f(x). Dies bedeutet, f(x) = 100% und f(x+1) = 95%.

Bedingung: f(x) = a^x = 100

f(x+1) = $a^{(x+1)}$ = 95

$$\frac{a^x}{a^{(x+1)}} = \frac{100}{95}$$

$$\frac{a^x}{a^x \bullet a^1} = \frac{10}{9,5} \qquad a^x \text{ gekürzt}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,95}$$

a = 0,95

c) halb so groß ist wie f(x). Dies bedeutet, f(x) = 100% und f(x+1) = 50%.

Bedingung: f(x) = a^x = 100

f(x+1) = $a^{(x+1)}$ = 50

$$\frac{a^x}{a^{(x+1)}} = \frac{100}{50}$$

$$\frac{a^x}{a^x \bullet a^1} = \frac{1}{0,5} \qquad a^x \text{ gekürzt}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{0,50}$$

a = 0,50

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

II – Exponentialfunktionen
8 – Vermischte Aufgaben

Seite 54 Nr. 23

Textaufgabe! Langsam durchlesen und Schritt für Schritt in Zahlen aufschreiben.

Eine Wassertonne hat 300 l Fassungsvermögen
Es dauert 20 Minuten bis sie gefüllt ist.
Da die Tonne alt und verrostet ist läuft Wasser beim Befüllen heraus und man benötigt jetzt 5 Minuten länger, also 25 Minuten zum Befüllen.

a) Wie viel Liter versickern während des Befüllens?

300 l in 20 min
x l in 1 min $\Rightarrow \frac{300}{x} = \frac{20}{1}$ nach x auflösen $x = \frac{300}{20} = 15$

es fließen 15 Liter in der Minute aus der Leitung. Die Tonne wird nun in 25 Minuten gefüllt: $25 \bullet 15 = 375$ l
Da die Tonne nur 300 l fasst laufen 75 Liter in den Boden.

b) Die Tonne wird gefüllt, also 300 Liter Wasser. Ist nach zwei Stunden noch Wasser in der Tonne?

In a) haben wir berechnet dass in 25 Minuten 75 Liter ins Erdreich sickern.
25 min sind 75 l
1 min x l $\Rightarrow \frac{75}{x} = \frac{25}{1} \Rightarrow x = \frac{75}{25} = 3$ l/min versickern.

In zwei Stunden, als 120 min, versickern:
120 min $\bullet$ 3 l/min = 360 l versickern .
Es ist nach zwei Stunden kein Wasser mehr in der Tonne.

c) Man entnimmt der Tonne alle zwei Minuten eine Gießkanne mit 8 l Wasser. Für wie viele Gießkannen reicht es?

In zwei Minuten versickern: 2 min $\bullet$ 3 l/min = 6 l und für eine Kanne werden 8 l entnommen. Dieser Vorgang wird x mal wiederholt.
Also: 300l – x $\bullet$ (8 l + 2 $\bullet$ 3 l)..... daraus soll nun eine Gleichung werden.

$$\Rightarrow \quad f(x) = 300 - x \bullet (8 + 6)$$
$$\Rightarrow \quad = 300 - 14 \bullet x$$

Die Tonne ist leer:
$$0 = 300 - 14 \bullet x$$
$$300 = 14 \bullet x$$
$$\frac{300}{14} = x = 21{,}4$$

Nach 21 Gießkannen ist die Tonne leer.

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.
© www.mathrix.net

Lambacher-Schweizer Baden-Württemberg Klasse 10

I – Potenzen
4 – Potenzrechnung bei ganzen Hochzahlen

S. 16 Nr. 16

Bei den folgenden Aufgaben geht es um die Multiplikation bzw. Division von Potenzen mit selber Hochzahl. **Potenzen mit gleicher Hochzahl**, kann man

- **multiplizieren**, indem man die **Basen multipliziert**.
- **dividieren**, indem man die **Basen dividiert**.

Dabei spielt es keine Rolle, ob die Basis eine ganze Zahl, ein Bruch, eine Dezimalzahl oder eine Variable (=Buchstabe) ist.

a) $2^n \bullet 5^n = (2 \bullet 5)^n = 10^n$

b) $10^x \div 5^x = (10 \div 5)^x = 2^x$

c) $1{,}8^k \div 0{,}6^k = (1{,}8 \div 0{,}6)^k = 3^k$

d) $2^{n+1} \bullet 3^{n+1} = (2 \bullet 3)^{n+1} = 6^{n+1}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \div \left(\frac{1}{9}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{9}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{3} \bullet \frac{9}{1}\right)^{2k} = \left(\frac{1 \bullet 3 \bullet 3}{3 \bullet 1}\right)^{2k} = 3^{2k}$

Zur Erinnerung: Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert!

f) $\frac{1}{3^x} \bullet 6^x = \frac{6^x}{3^x} = 6^x \div 3^x = (6 \div 3)^x = 2^x$

g) $\frac{7^n}{14^n} = 7^n \div 14^n = (7 \div 14)^n = 0{,}5^n$

h) $4^{k+1} \bullet \frac{6^{k+1}}{12^{k+1}} = 4^{k+1} \bullet 6^{k+1} \div 12^{k+1} = (4 \bullet 6 \div 12)^{k+1} = (24 \div 12)^{k+1} = 2^{k+1}$

i) Bei den letzten zwei Teilaufgaben gilt die einschränkende Bedingung a≠0. Könnte a Null sein, so würde man in bestimmten Fällen durch Null teilen, was nicht zulässig ist.

$$\frac{a^{2x+1}}{(2a)^{2x+1}} = a^{2x+1} \div (2a)^{2x+1} = (a \div 2a)^{2x+1} = \left(\frac{a}{2a}\right)^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = 0{,}5^{2x+1}$$

j) $a^{y-1} \bullet (a^{y-1} \div a^{y-1}) = a^{y-1} \bullet ((a \div a)^{y-1}) = a^{y-1} \bullet 1^{y-1} = (a \bullet 1)^{y-1} = a^{y-1}$

Dieses Dokument unterliegt dem Copyright des Urhebers (www.mathrix.net). Jegliches Verändern, Veröffentlichen und Verkaufen dieses Dokumentes ohne schriftliche Genehmigung des Urhebers ist verboten. Zuwiderhandlungen werden zur Anzeige gebracht und strafrechtlich verfolgt. Wir übernehmen keine Haftung für die Richtigkeit der Lösungswege.

© www.mathrix.net