Mathe fit mit einem Klick!

Supertrainer

Mathematik

Realschul-Abschlussprüfung

Pflichtteil

(Baden-Württemberg)

Mathematik
Lernmaterialen

Vorwort:

Mit dem vorliegenden Buch ist es möglich

- Defizite in einzelnen Aufgabengebieten innerhalb weniger Tage zu beseitigen
- den kompletten Stoff von Klasse 9 und 10 der Realschule zu wiederholen
- sich auf Klassenarbeiten in Klasse 9 und 10 vorzubereiten
- sein Gewissen (und die Eltern!) zu beruhigen, wenn man sich intensiv damit beschäftigt

Jedem Aufgabengebiet wird dazu ein Crashkurs vorangestellt, der den jeweiligen Stoff in konzentrierter Form behandelt. Beispielaufgaben erläutern die einzelnen Sachverhalte.

Anschließend werden die Pflichtaufgaben der Prüfungsjahrgänge 2004 – 2011 vorgestellt und durchgerechnet. Dass dabei manchmal andere Lösungswege und Schreibweisen verwendet werden, ist letztlich unerheblich. Die Lösungswege sind so ausführlich dargestellt, dass jeder damit zurecht kommen sollte. Wer diese Pflichtaufgaben ohne größere Probleme lösen kann, hat auch mit den umfangreicheren Wahlaufgaben sicher keine Schwierigkeiten.

Wer sich nur auf Wahlaufgaben stürzen will, dem sei das Skript *„Das Mathe-Powerkonzept für die Wahlaufgaben der Realschul-Abschlussprüfung“* empfohlen.

Verzeichnis der Aufgabengebiete:

Der Autor:

Der Autor Hans-Peter Böhmerle war bis zu seiner Pensionierung im Jahre 2007 Realschullehrer für Mathematik und Physik an einer Realschule in Esslingen. 37 Jahre lang hat er Mathematik an der 10. Klasse unterrichtet und viele Jahre lang Mathe-Prüfungsvorbereitungskurse an der VHS abgehalten.

Trigonometrie

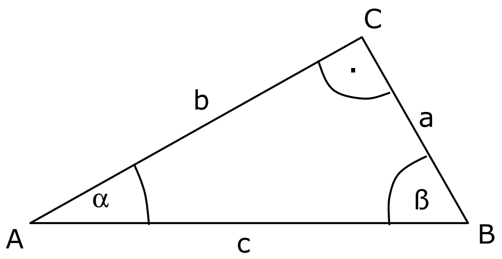
Inhaltsverzeichnis

Crashkurs:

Die Dreiecksberechnung läuft in der Realschule <u>immer</u> über das rechtwinklige Dreieck. Wenn keines da ist: die gegebene Figur so aufteilen, dass rechtwinklige Dreiecke entstehen.
Achtung: Dreiecke sind nur dann rechtwinklig, wenn es ausdrücklich in der Aufgabe vermerkt ist oder wenn dies aus geometrische Gesetzmäßigkeiten folgt.

Ein Dreieck ist nie rechtwinklig, nur „weil es so aussieht"!

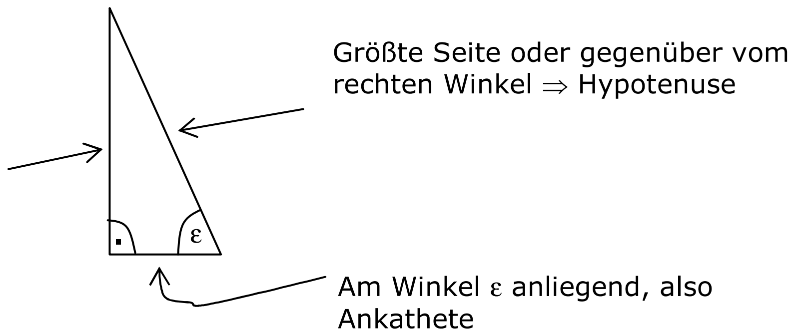
Die trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan stellen Verbindungen her zwischen den Winkeln und den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Dabei liegt die Hypotenuse immer dem rechten Winkel gegenüber, die Schenkel des rechten Winkels sind die Katheten.



Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete („Gegenkathete") zur Hypotenuse: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ oder $\sin ß = \frac{b}{c}$	Der Cosinus eines Winkels ist das Verhältnis von der anliegenden Kathete („Ankathete") zur Hypotenuse: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ oder $\cos ß = \frac{a}{c}$	Der Tangens eines Winkels ist das Verhältnis von der Gegenkathete zur Ankathete: $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ oder $\tan ß = \frac{b}{a}$

Egal, wie das Dreieck liegt, zuerst muss man sich klar sein:

Wo ist die Hypotenuse, wo sind die Katheten?



Für die Bezeichnungen der Strecken hat man zwei Alternativen: entweder mit Hilfe der Endpunkte der Strecke, also z.B. „ $\overline{AB}$ " oder durch einen kleinen Buchstaben z.B „c".
Beides hat Vor- und Nachteile: Da die Eckpunkte der Dreiecke entweder gegeben sind oder selbst festgelegt wurden (siehe Tipps weiter unten), hat man vielleicht ein wenig mehr Schreibarbeit ($\overline{AB}$ statt c), die Zeichnung bleibt aber wesentlich übersichtlicher. In den vorgestellten Übungs- und Prüfungsaufgaben ist deshalb meistens die Schreibweise mit den Endpunkten gewählt worden.

Auch beim reinen Rechenweg sollte man nicht zu schnell vorgehen, besonders beim Umstellen der Gleichungen (Äquivalenzumformungen):

z.B. wenn der Winkel gesucht ist: $\tan\varphi_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{5{,}6}{4{,}7} \Rightarrow \varphi_1 = 50^\circ$

Reihenfolge: Formel aufstellen – Zahlen einsetzen – mit dem Taschenrechner ausrechnen

(Tastenfolge: $\boxed{5{,}6}\boxed{:}\boxed{4{,}7}\boxed{=}\boxed{2nd}\boxed{\tan}\boxed{=}$, abhängig vom Taschenrechner kann die 2nd-Taste auch mit „shift" oder „inv" gekennzeichnet sein!) Wichtig ist beim Aufschreiben auf jeden Fall der „daraus folgt"-Pfeil, denn nicht 5,6:4,7 ist gleich 50° sondern der Winkel ist gleich 50°!!! (Manche Lehrer sind hier sehr kleinlich!)

Ist eine Seite gesucht, muss man die Gleichung umstellen, dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

Zähler gesucht: $\cos\alpha_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AC}\cdot\cos\alpha_1 = 10{,}7\cdot\cos 42{,}3^\circ = 7{,}9\ \text{cm}$

(Die Äquivalenzumformung „beide Seiten der Gleichung mit $\overline{AC}$ multiplizieren" kann man weglassen, wenn man mit dem „daraus folgt"-Pfeil arbeitet und nur noch das Ergebnis dieser Umformung notiert).

Nenner gesucht: $\tan ß_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AD}}{\tan ß_1} = \frac{3{,}1}{\tan 31{,}7^\circ} = 5{,}0\text{cm}$

(Die Äquivalenzumformung bewirkt hier, dass $\tan ß_1$ und $\overline{AB}$ einfach die Plätze tauschen. Auch hier ist wichtig, mit dem Pfeil zu arbeiten!)

Tipps zur Lösung von trigonometrischen Aufgaben:

1. Zu Beginn wenn möglich eine Maßstabszeichnung anfertigen und dort alle gegebenen Größen grün markieren.

2. Durch die Maßstabszeichnung kann man jedes Rechenergebnis sofort durch Messung kontrollieren.

3. Sollte man den Einstieg in eine Aufgabe nicht finden, kann man aus der Zeichnung das Maß einer Strecke oder eines Winkels entnehmen und damit weiterrechnen. Mit Glück erhält man für diese Berechnungen dann wieder Punkte.

4. So lange wie möglich mit den gegebenen Stücken arbeiten! Die Ergebnisse werden genauer und man tappt nicht so häufig in eine selbstgestrickte Falle.

5. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse immer die längste Seite, weil sie dem größten Winkel (90°) gegenüber liegt (also muss der Nenner bei sin und cos immer größer sein als der Zähler).

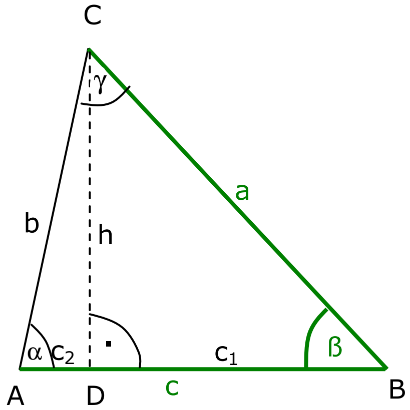
Übungsaufgaben:

Aufgabe 1:

Von einem Dreieck ABC ist gegeben:

$\overline{BC} = a = 6{,}4$ **cm**
$\overline{AB} = c = 8{,}9$ **cm**
ß = 56,3°

Berechne $\overline{AC} = b$ **und alle anderen Winkel.**



Wenn es in der Aufgabe nicht ausdrücklich steht, ist es kein rechtwinkliges Dreieck!

Wir müssen also erst eines „konstruieren" indem wir die Höhe h (genau genommen ist es die Höhe h_c !) eintragen. (Die Höhe h_a würde übrigens auch zum Ziel führen!)

ΔBDC:

$$\sin ß = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin ß = 6{,}4 \cdot \sin 56{,}3° = 5{,}3 \text{ cm}$$

$$\cos ß = \frac{c_1}{a} \Rightarrow c_1 = a \cdot \cos ß = 6{,}4 \cdot \cos 56{,}3° = 3{,}6 \text{ cm}$$

ΔADC:

$c_2 = c - c_1 = 8{,}9 - 3{,}6 = 5{,}3$ cm

Mit h und c_2 haben wir von diesem rechtwinkligen Dreieck nun zwei Seiten (die Katheten) gegeben, können also mit dem Satz des Pythagoras die Seite b ausrechnen:

$$b^2 = c_2^2 + h^2 \Rightarrow \underline{\underline{b}} = \sqrt{5{,}3^2 + 5{,}3^2} = \underline{\underline{7{,}5 \text{ cm}}}$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{c_2} = \frac{5{,}3}{5{,}3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45°}}$$

ΔABC:

$$\underline{\underline{\gamma}} = 180° - (\alpha + ß) = 180° - (45° + 56{,}3°) = \underline{\underline{78{,}7°}}$$

Aufgabe 2:

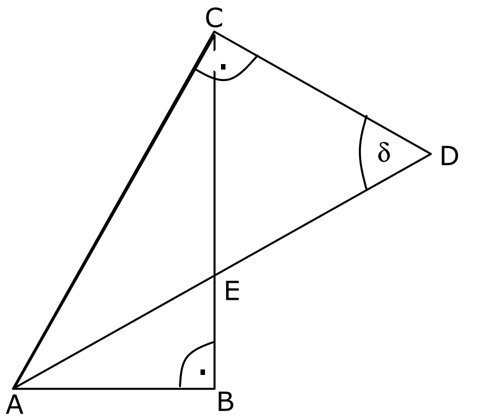
In den rechtwinkligen Dreiecken ABC und ADC sind gegeben:

$\overline{AB} = 3{,}5\ \text{cm}$

$\overline{AC} = 6{,}4\ \text{cm}$

$\delta = 68{,}0°$

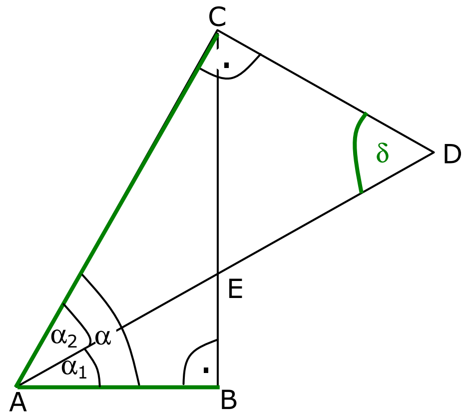
Berechne die Länge $\overline{DE}$. .



Lösung:

In den Dreiecken ADC und ABC sind zwei jeweils zwei Stücke bekannt. Sie können also komplett berechnet werden.

Für die gesuchte Strecke brauchen wir $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$. $\overline{AE}$ bekommen wir aus dem Δ ABE, wenn wir dort den Winkel vorher den Winkel α_1 berechnen.



Δ ADC:

$$\sin\delta = \frac{\overline{AC}}{\underline{\underline{AD}}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\sin\delta} = \frac{6{,}4}{\sin 68°} = 6{,}9\ \text{cm}$$

$\alpha_2 = 90° - \delta = 90° - 68° = 22°$

Δ ABC:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{3{,}5}{6{,}4} \Rightarrow \alpha = 56{,}8°$$

Δ ABE:

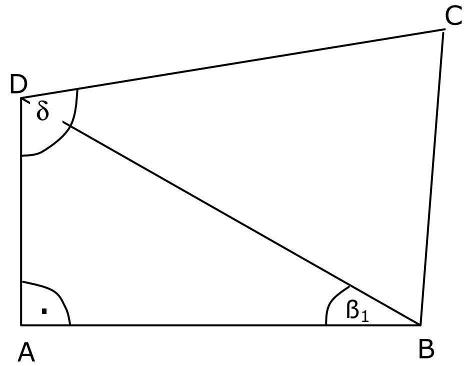
$\alpha_1 = \alpha - \alpha_2 = 56{,}8° - 22° = 34{,}8°$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{\cos\alpha_1} = \frac{3{,}5}{\cos 34{,}8°} = 4{,}3\ \text{cm}$$

Δ EDC:

$$\underline{\underline{\overline{DE}}} = \overline{AD} - \overline{AE} = 6{,}9 - 4{,}3 = \underline{\underline{2{,}6\ \text{cm}}}$$

Aufgabe 3:

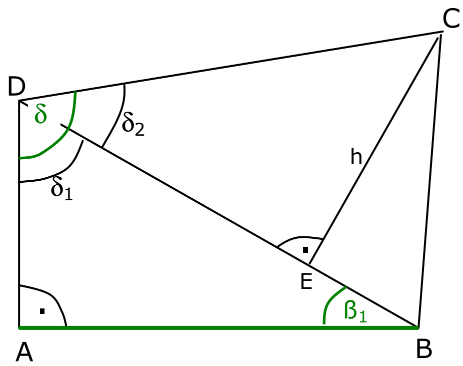


Gegeben das Viereck ABCD mit:

A_{ABCD} = 39,8 cm² (Fläche des Vierecks)
$\overline{AB}$ = 6,3 cm
$\beta_1 = 38{,}5°$
$\delta = 118{,}5°$

Berechne den Umfang des Vierecks.

Lösung:



Das Δ ABD ist rechtwinklig. Da man zwei Stücke kennt ($\overline{AB}$ und β_1), kann man das ganze Dreieck, einschließlich der Fläche, berechnen!
Wenn wir diese Fläche von der Gesamtfläche abziehen, erhalten wir die Fläche des Dreiecks BCD.
Über diese können wir, wenn $\overline{BD}$ berechnet ist, die Höhe h ausrechnen, im ΔDEC dann $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$. Damit ist dann $\overline{BE}$ kein Problem und somit auch $\overline{BC}$ und der Umfang.

1.) $\Delta\, ABD$:

$$\tan\beta_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{\overline{AB}}} \Rightarrow \overline{AD} = 6{,}3 \cdot \tan 38{,}5° = 5{,}0\,\text{cm}$$

$$A_{BAD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{2} = \frac{6{,}3\cdot 5{,}0}{2} = 15{,}8\ \text{cm}^2$$

$$\delta_1 = 90° - \beta_1 = 90° - 38{,}5° = 51{,}5°$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{BD}}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{6{,}3}{\cos 38{,}5°} = 8{,}1\,\text{cm}$$

2.) $\Delta\, BCD$:

$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = 118{,}5° - 51{,}5° = 67°$$

$A_{BCD} = A_{ABCD} - A_{BAD}$ = 39,8 – 15,8 = 24,0 cm²

$$A_{BCD} = \frac{\overline{BD}\cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2\cdot A_{BCD}}{\overline{BD}} = \frac{2\cdot 24}{8{,}1} = 5{,}9\,\text{cm}$$

3.) $\Delta\, DEC$:

$$\sin\delta_2 = \frac{h}{\overline{\overline{CD}}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{5{,}9}{\sin 67°} = 6{,}4\,\text{cm}$$

$$\tan\delta_2 = \frac{h}{\overline{\overline{DE}}} \Rightarrow \overline{DE} = \frac{5{,}9}{\tan 67°} = 2{,}5\,\text{cm}$$

4.) $\Delta\, BEC$:

$$\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = 8{,}1 - 2{,}5 = 5{,}6\,\text{cm}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BE}^2 + h^2} = \sqrt{5{,}6^2 + 5{,}9^2} = 8{,}1\,\text{cm}$$

<u>Viereck ABCD:</u>

Umfang u = 6,3 + 8,1 + 6,4 + 5,0

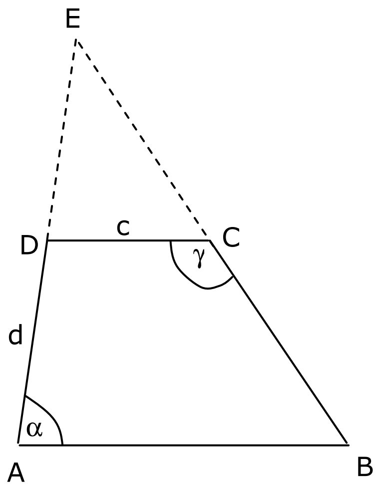
$$\underline{\underline{u = 20{,}8\ \text{cm}}}$$

Aufgabe 4:

In einem Trapez ABCD ist gegeben:

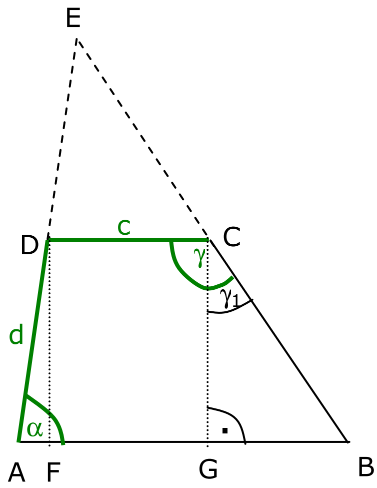
$\overline{CD}$ = c = 4,8 cm
$\overline{AD}$ = d = 3,3 cm
α = 61°
γ = 146°

Berechne die Fläche des Trapezes.
Verlängert man die beiden Schenkel des Trapezes bis zum gemeinsamen Schnittpunkt E nach oben, so entsteht ein Dreieck ABE. Berechne die Länge der Dreiecksseite $\overline{AE}$!



Lösung:

Ein häufig gangbarer Weg bei der Berechnung von Trapezen, ist das Einzeichnen der Trapezhöhe, weil damit rechtwinklige Dreiecke entstehen.
Für die Fläche des Trapezes brauchen wir genau diese Höhe und die Grundseite des Trapezes, die sich aus $\overline{AF}, \overline{FG} = \overline{CD} = c$ und $\overline{BG}$ zusammensetzt.



Δ AFD:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{DF}}{d} \Rightarrow \overline{DF} = 3{,}3 \cdot \sin 61° = 2{,}9 \text{ cm} = \overline{CG}$$

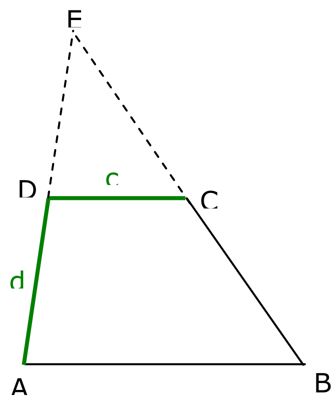
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{d} \Rightarrow \overline{AF} = 3{,}3 \cdot \cos 61° = 1{,}6 \text{ cm}$$

Δ BGC:

$\gamma_1 = \gamma - 90° = 146° - 90° = 56°$

$$\tan\gamma_1 = \frac{\overline{BG}}{\overline{CG}} \Rightarrow \overline{BG} = \overline{CG} \cdot \tan\gamma_1 = 2{,}9 \cdot \tan 56° = 4{,}3 \text{ cm}$$

Trapez ABCD:



$$\overline{AB} = \overline{AF} + c + \overline{BG} = 1{,}6 + 4{,}8 + 4{,}3 = 10{,}7 \text{ cm}$$

$$\underline{\underline{A_{ABCD}}} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DF} = \frac{10{,}7 + 4{,}8}{2} \cdot 2{,}9 \; \underline{\underline{= 22{,}5 \text{ cm}^2}}$$

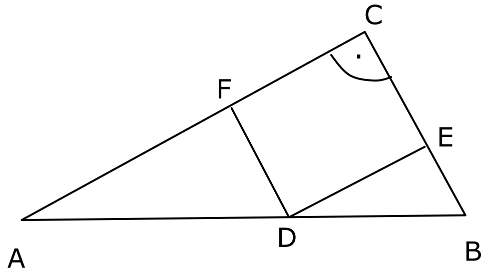
Zur Berechnung der gesuchten Dreiecksseite brauchen wir den zweiten Strahlensatz:

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{ED} + d} = \frac{c}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{ED}}{\overline{ED} + 3{,}3} = \frac{4{,}8}{10{,}7} \Rightarrow 10{,}7 \cdot \overline{ED} = 4{,}8 \cdot \left(\overline{ED} + 3{,}3\right) \Rightarrow 10{,}7 \cdot \overline{ED} = 4{,}8 \cdot \overline{ED} + 15{,}8$$

$$10{,}7 \cdot \overline{ED} - 4{,}8 \cdot \overline{ED} = 15{,}8 \Rightarrow 5{,}9 \cdot \overline{ED} = 15{,}8 \Rightarrow \overline{ED} = 2{,}7 \text{ cm} \Rightarrow \underline{\underline{\overline{AE} =}} \; \overline{AD} + \overline{ED} = 3{,}3 + 2{,}7 = \underline{\underline{6{,}0 \text{ cm}}}$$

Aufgabe 5:

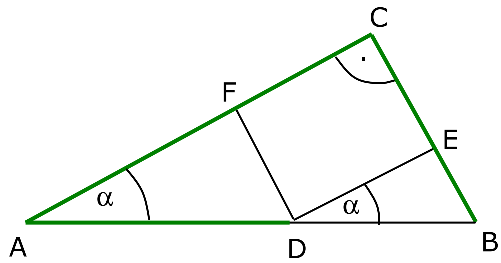
Von einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben:



$\mathbf{\overline{BC} = 5{,}2\ cm}$
$\mathbf{\overline{AC} = 8{,}3\ cm}$
$\mathbf{\overline{AD} = 4{,}4\ cm}$

Die Punkte DECF bilden ein Rechteck. Berechne dessen Flächeninhalt!

Lösung:



Für die Fläche des Rechtecks brauchen wir die Strecken $\overline{DF}$ und $\overline{DE}$. Für $\overline{DF}$ brauchen wir den Winkel α. Dieser taucht als Winkel BDE wieder auf (Stufenwinkel). $\overline{DB}$ erhalten wir als Differenz von $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$.

Δ ABC:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{5{,}2}{8{,}3} \Rightarrow \alpha = 32{,}1°$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{8{,}3^2 + 5{,}2^2} = 9.8\ \text{cm}$$

Δ ADF:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{DF} = 4{,}4 \cdot \sin 32{,}1° = 2{,}3\ \text{cm}$$

Δ DBE:

$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = 9{,}8 - 4{,}4 = 5{,}4\,\text{cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} \Rightarrow \overline{DE} = 5{,}4 \cdot \cos 32{,}1° = 4{,}6\ \text{cm}$$

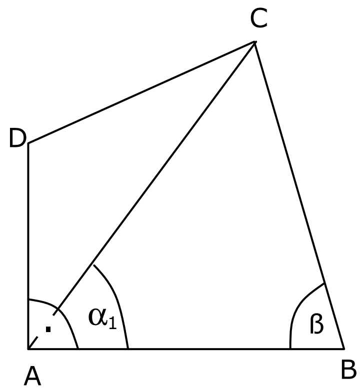
Rechteck DECF:

$$\mathbf{\underline{\underline{A_{DECF}}} = \overline{DF} \cdot \overline{DE} = 2{,}3 \cdot 4{,}6 = \underline{\underline{10{,}6\ cm^2}}}$$

Pflichtaufgaben 2004-2011:

T 2004/1:

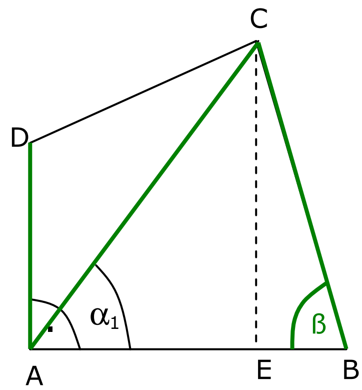
Im Viereck ABCD sind gegeben:



$$\overline{AC} = 10{,}7\ \text{cm}$$
$$\overline{AD} = 5{,}5\ \text{cm}$$
$$\overline{BC} = 9{,}6\ \text{cm}$$
$$ß = 48{,}2°$$

Berechnen Sie den Winkel α_1.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ACD?

Lösung:



Für den Winkel α_1 brauchen wir ein rechtwinkliges Dreieck: Höhe im Dreieck ABC. Im Δ AEC können wir dann α_1 berechnen, wenn wir noch ein zweites Bestimmungsstück haben. Das kann nur die Höhe $\overline{EC}$ sein, die wir im Δ BEC berechnen können.

Δ BEC:

$$\sin ß = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{EC} = \overline{BC} \cdot \sin ß = 9{,}6 \cdot \sin 48{,}2° = 7{,}2\ \text{cm}$$

Δ AEC:

$$\sin \alpha_1 = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = \frac{7{,}2}{10{,}7} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha_1 = 42{,}3°}}$$

Die gesuchte Fläche des Dreiecks ACD berechnet man am einfachsten als Differenz des Trapezes AECD und des Dreiecks AEC. Dazu müssen wir noch die Strecke $\overline{AE}$ berechnen:

Δ AEC:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \cos \alpha_1 = 10{,}7 \cdot \cos 42{,}3° = 7{,}9\ \text{cm}$$

Δ ACD:

$A = A_{Tr} - A_{\Delta}$

$$\underline{\underline{A}} = \frac{a+c}{2} \cdot h - \frac{a \cdot b}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{EC}}{2} \cdot \overline{AE} - \frac{\overline{AE} \cdot \overline{EC}}{2} = \frac{5{,}5 + 7{,}2}{2} \cdot 7{,}9 - \frac{7{,}9 \cdot 7{,}2}{2} \underline{\underline{= 21{,}7\ \text{cm}^2}}$$

Es ist auch ein anderer Lösungsweg denkbar: α auf 90° ergänzen, die Höhe des Dreiecks ACD ausrechnen (= Lot von D auf $\overline{AC}$) und dann die Fläche.